Школьный этап олимпиады по математике

Сентябрь 2014 г.

11 класс

1 блок

1. (**6 б.**) Иван Федосеевич каждый день в одно и то же время выезжает на своём автомобиле на работу. Если он едет со средней скоростью 40 км/ч, то он прибывает на работу в 8 ч 04 мин. Если его средняя скорость 60 км/ч, то он приезжает в 7 ч 56 мин. С какой средней скоростью (в км/ч) нужно ехать Ивану Федосеевичу, чтобы прибыть на работу ровно в 8 ч?

Ответ: 48.

Решение. Пусть t — время (в ч), которое потребуется Ивану Федосеевичу, чтобы прибыть на работу ровно в 8.00, а s — расстояние (в км) от его дома до его работы. Тогда

$$s = 40\left(t + \frac{1}{15}\right) = 60\left(t - \frac{1}{15}\right),$$

откуда

$$20t = \frac{20}{3}, \quad t = \frac{1}{3}, \quad s = 16, \quad v = \frac{s}{t} = 48.$$

2. (**6 б.**) Известно, что $\frac{xy}{x^2+6y^2} = \frac{1}{5}$. Вычислите наименьшее возможное значение выражения $\frac{xy}{x^2-6y^2}$.

Ответ: -1.

Решение. Условие задачи можно переписать в виде $x^2 - 5xy + 6y^2 = 0$. Будем считать y параметром, а x переменной. Решив квадратное уравнение, получим $x = 2y$ или $x = 3y$. Теперь подстановка даёт два возможных значения вычисляемого выражения: -1 и 1.

3. (**6 б.**) Найдите наибольший корень уравнения

$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} = \frac{1}{8}.$$

Ответ: 4.

Решение. Представим каждое слагаемое в левой части уравнения в виде разности:

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}; \quad \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2};$$

$$\frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}; \quad \frac{1}{(x+3)(x+4)} = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}.$$

После суммирования получим уравнение $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+4} = \frac{1}{8}$. Оно сводится к квадратному $x^2 + 4x - 32 = 0$, корни которого -8 и 4.

4. (**6 б.**) Имеется клетчатое поле 50×50. Некоторые клетки покрашены в чёрный цвет. Известно, что каждая чёрная клетка — единственная либо в строке, либо в столбце. Каково максимальное число чёрных клеток?

Ответ: 98.

Решение. Сначала приведём пример на 98 чёрных клеток. Покрасим все клетки верхней строки и левого столбца, за исключением их общей клетки.

Теперь докажем, что большего числа чёрных клеток быть не может. Число чёрных клеток, единственных в строках, не больше 50. Если таких клеток ровно 50, то никаких других чёрных клеток нет, и общее число чёрных клеток 50, что меньше 98. Значит, можно считать, что чёрных клеток, единственных в строках, не больше 49. Такое же рассуждение можно провести и со столбцами. Поэтому общее число чёрных клеток не больше $49 + 49 = 98$.

5. (**6 б.**) Найдите наибольшее значение функции $y = 3\sin x - 4\cos x$.

Ответ: 5.

Решение. Применив формулу введения вспомогательного угла, имеем $y = 5\sin(x - \varphi)$, где φ — некоторый фиксированный угол. Теперь ответ очевиден.

6. (**6 б.**) В равнобедренную трапецию с длинами оснований 18 и 32 вписана окружность. Найдите её радиус.

Ответ: 12.

Решение. В описанном четырёхугольнике суммы длин противоположных сторон равны между собой. Сумма длин оснований 50, значит длина боковой стороны равна 25. Проекция боковой стороны на основание равна полуразности оснований $\frac{32-18}{2} = 7$. По теореме Пифагора находим высоту трапеции. Она равна 24. Но длина высоты равна удвоенному радиусу вписанной окружности.

7. (**6 б.**) В классе 16 учеников, среди них братья Кирилл и Михаил. Класс случайным образом разбивают на 4 группы по 4 человека. Найдите вероятность того, что Кирилл и Михаил окажутся в разных группах.

Ответ: 0,8.

Решение. После того, как Кирилл занял место в одной из групп, Михаил может занять одно из 15 оставшихся мест, 12 из которых соответствуют интересующему нам событию. Поэтому искомая вероятность равна $\frac{12}{15} = 0{,}8$.

8. (**8 б.**) В собрании сочинений Стефана Цвейга 7 томов. Они стоят на полке почти по порядку: каждый том стоит либо на своём месте, либо на соседнем. Сколько таких расположений возможно?

Ответ: 21.

Решение. Пусть a_n — количество перестановок чисел от 1 до n, в которых для каждого i число i стоит на i-м месте или на соседнем с ним. В задаче требуется найти a_7.

Очевидно, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$. Число n стоит на n-м месте или на $(n-1)$-м. В первом случае количество перестановок равно a_{n-1}. А во втором случае на n-м месте может стоять только число $n-1$; таких перестановок a_{n-2}. Отсюда получаем рекуррентное соотношение

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2},$$

с помощью которого последовательно находим $a_3 = 3$, $a_4 = 5$, $a_5 = 8$, $a_6 = 13$, $a_7 = 21$.

2 блок

1. (**6 б.**) Андрей Иванович каждый день в одно и то же время выезжает на своём велосипеде на работу. Если он едет со средней скоростью 12 км/ч, то он прибывает на работу в 8 ч 05 мин. Если его средняя скорость 18 км/ч, то он приезжает в 7 ч 55 мин. С какой средней скоростью (в км/ч) нужно ехать Андрею Ивановичу, чтобы прибыть на работу ровно в 8 ч?

Ответ: 14,4.

Решение. Пусть t — время (в ч), которое потребуется Андрею Ивановичу, чтобы прибыть на работу ровно в 8.00, а s — расстояние (в км) от его дома до его работы. Тогда

$$s = 12\left(t + \frac{1}{12}\right) = 18\left(t - \frac{1}{12}\right),$$

откуда

$$6t = \frac{5}{2}, \quad t = \frac{5}{12}, \quad s = 6, \quad v = \frac{s}{t} = 14{,}4.$$

2. (**6 б.**) Найдите наименьший корень уравнения

$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: -6.

Решение. Представим каждое слагаемое в левой части уравнения в виде разности:

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}; \quad \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2};$$

$$\frac{1}{(x+2)(x+3)}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3};\quad \frac{1}{(x+3)(x+4)}=\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}.$$

После суммирования получим уравнение $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+4}=\frac{1}{3}$. Оно сводится к квадратному $x^2+4x-12=0$, корни которого -6 и 2.

3. (**6 б.**) Известно, что $\frac{xy}{x^2+5y^2}=\frac{1}{6}$. Вычислите наибольшее возможное значение выражения $\frac{xy}{x^2-5y^2}$.

Ответ: 0,25.

Решение. Условие задачи можно переписать в виде $x^2-6xy+5y^2=0$. Будем считать y параметром, а x переменной. Решив квадратное уравнение, получим $x=y$ или $x=5y$. Теперь подстановка даёт два возможных значения вычисляемого выражения: $-0{,}25$ и $0{,}25$.

4. (**6 б.**) Имеется клетчатое поле 100×100. Некоторые клетки покрашены в чёрный цвет. Известно, что каждая чёрная клетка — единственная либо в строке, либо в столбце. Каково максимальное число чёрных клеток?

Ответ: 198.

Решение. Сначала приведём пример на 198 чёрных клеток. Покрасим все клетки верхней строки и левого столбца, за исключением их общей клетки.

Теперь докажем, что большего числа чёрных клеток быть не может. Число чёрных клеток, единственных в строках, не больше 100. Если таких клеток ровно 100, то никаких других чёрных клеток нет, и общее число чёрных клеток 100, что меньше 198. Значит, можно считать, что чёрных клеток, единственных в строках, не больше 99. Такое же рассуждение можно провести и со столбцами. Поэтому общее число чёрных клеток не больше $99+99=198$.

5. (**6 б.**) Найдите наибольшее значение функции $y=12\sin x+5\cos x$.

Ответ: 13.

Решение. Применив формулу введения вспомогательного угла, имеем $y=13\sin(x+\varphi)$, где φ — некоторый фиксированный угол. Теперь ответ очевиден.

6. (**6 б.**) В равнобедренную трапецию с длинами оснований 20 и 45 вписана окружность. Найдите её радиус.

Ответ: 15.

Решение. В описанном четырёхугольнике суммы длин противоположных сторон равны между собой. Сумма длин оснований 65, значит длина боковой стороны равна 32,5. Проекция боковой стороны на основание равна полуразности оснований $\frac{45-20}{2}=12{,}5$. По теореме Пифагора находим высоту трапеции. Она равна 30. Но длина высоты равна удвоенному радиусу вписанной окружности.

7. (**6 б.**) Имеется три пары одинаковых перчаток. Из них случайно выбирают четыре перчатки. С какой вероятностью из них можно составить две пары перчаток?

Ответ: 0,6.

Решение. Четыре перчатки образуют две пары тогда и только тогда, когда пару образуют оставшиеся две перчатки. Поэтому подсчитаем вероятность составить пару для двух перчаток. После того, как одна перчатка выбраны, из пяти оставшихся три образуют с ней пару. Поэтому искомая вероятность равна $\frac{3}{5} = 0{,}6$.

8. (**8 б.**) В собрании сочинений И. С. Тургенева 12 томов. Они стоят на полке почти по порядку: каждый том стоит либо на своём месте, либо на соседнем. Сколько таких расположений возможно?

Ответ: 233.

Решение. Пусть a_n — количество перестановок чисел от 1 до n, в которых для каждого i число i стоит на i-м месте или на соседнем с ним. В задаче требуется найти a_{12}.

Очевидно, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$. Число n стоит на n-м месте или на $(n-1)$-м. В первом случае количество перестановок равно a_{n-1}. А во втором случае на n-м месте может стоять только число $n-1$; таких перестановок a_{n-2}. Отсюда получаем рекуррентное соотношение

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2},$$

с помощью которого последовательно находим $a_3 = 3$, $a_4 = 5$, $a_5 = 8$, $a_6 = 13$, $a_7 = 21$, $a_8 = 34$, $a_9 = 55$, $a_{10} = 89$, $a_{11} = 144$, $a_{12} = 233$.