Открытая областная олимпиада по математике

Очный тур 30 ноября 2008 г.

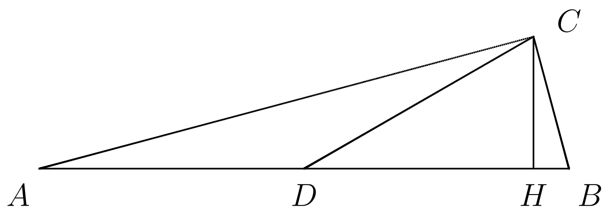
Решения задач

9 класс

1. В прямоугольном треугольнике высота, проведённая из вершины прямого угла в 4 раза меньше гипотенузы. Найдите острые углы этого треугольника.

Ответ: 15° и 75°.

Решение. Пусть в треугольнике ABC угол C — прямой, CH и CD — высота и медиана.



По свойству медианы, проведённой из вершины прямого угла, $CD = AD = \frac{1}{2}AB$. По условию $CH = \frac{1}{4}AB$. Значит, в прямоугольном треугольнике CDH катет CH вдвое меньше гипотенузы CD. Отсюда $\angle CDH = 30^\circ$. Этот угол является внешним для трегольника ADC. Внешний угол равен сумме двух внутренних углов треугольника, не смежных с этим внешним. Поскольку $AD = DC$, имеем равенство углов $\angle DAC = \angle ACD$. Значит, $\angle A = 15^\circ, \angle B = 75^\circ$.

2. Числа $1, 2, 3, \ldots, 2008$ разбили на пары $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_{1004}, b_{1004})$ так, что для каждого i разность $a_i - b_i$ равна 1 или 6. Какой цифрой оканчивается число, равное

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_{1004}) - (b_1 + b_2 + \ldots + b_{1004})?$$

Ответ: 4.

Решение. Обозначим $c_i = a_i - b_i$. Имеем

$$S = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{1004}) - (b_1 + b_2 + \ldots + b_{1004}) = c_1 + c_2 + \ldots + c_{1004}.$$

Пусть среди чисел c_i ровно k равны 6. Тогда $S = 6k + (1004 - k) = 1004 + 5k$. Отсюда видно, что число S оканчивается на 4 или 9.

Теперь заметим, что в выражении

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{1004} - b_1 - b_2 - \ldots - b_{1004}$$

количество нечётных слагаемых равно 1004 (так как среди чисел от 1 до 2008 чётных и нечётных чисел поровну). Поэтому число S чётно. Значит, последняя цифра числа S чётная.

Таким образом, число S оканчивается на 4.

3. Числа a, b и c — целые. Уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{и} \quad (c-b)x^2 + (c-a)x + a + b = 0$$

имеют общий корень (не обязательно целый). Докажите, что число $a+b+2c$ делится на 3.

Доказательство. Пусть x_0 — общий корень уравнений. Тогда

$$ax_0^2 + bx_0 + c = 0; \quad (c-b)x_0^2 + (c-a)x_0 + a + b = 0.$$

Вычтя из первого равенства второе, получим

$$(a-c+b)(x_0^2 + x_0 - 1) = 0.$$

Одна из скобок равна нулю.

Если $a-c+b=0$, то $a+b+2c=3c$ делится на 3.

Если $x_0^2+x_0-1=0$, то $x_0 = \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ и

$$ax_0^2 + bx_0 + c = a(1-x_0) + bx_0 + c = a + c + (b-a)x_0 = 0. \qquad (*)$$

При $b \neq a$ из $(*)$ следует, что $x_0 = \dfrac{a+c}{a-b}$. Но это противоречит иррациональности числа x_0. Значит, $b=a$. Но тогда из $(*)$ получаем $c=-a$, откуда $a+b+2c = 2a-2a = 0$ делится на 3.

4. Плоскость раскрашена в 4 цвета (т. е. каждая точка плоскости покрашена в один из данных четырёх цветов, и для каждого цвета найдётся точка этого цвета). Докажите, что существует прямая, содержащая точки не менее чем трёх цветов.

Решение. Пусть точки A, B, C и D имеют соответственно цвета a, b, c и d. Рассуждая от противного, предположим, что ни одна прямая не содержит точек более чем двух цветов. Тогда прямая AB раскрашена в цвета a и b, а прямая CD — в цвета c и d. Значит, эти прямые не имеют общих точек, т. е. они параллельны. По аналогичной причине параллельны и прямые AD и BC. Тогда четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм. Его диагонали AC и BD пересекаются, что невозможно, поскольку цвета точек этих прямых разные.