Школьный этап олимпиады по математике

Сентябрь 2015 г.

11 класс

1 блок

1. (**10 б.**) По дороге, ведущей из леса в посёлок, спешат Красная Шапочка и волк, а навстречу им идут (порознь, конечно) бабушка и охотник. Скорость сближения волка и бабушки 14 км/ч, Красной Шапочки и бабушки 9 км/ч, охотника и Красной Шапочки 11 км/ч. С какой скоростью (в км/ч) сближаются волк и охотник?

Ответ: 16.

Решение. Пусть скорости Красной Шапочки, волка, бабушки и охотника равны соответственно a, b, c и d. Тогда $b+c=14$, $a+c=9$, $d+a=11$. Нужно вычислить $b+d$. Имеем

$$b+d=(b+c)+(a+d)-(a+c)=14+11-9=16.$$

2. (**12 б.**) Две бригады должны были по плану отремонтировать 22 мотора. Первая бригада перевыполнила план на 25%, а вторая — на 20%. Сколько моторов по плану должна была отремонтировать первая бригада?

Ответ: 12.

Решение. Пусть план первой бригады x, а второй y. Поскольку $0{,}25x$ — целое число, x делится на 4. Поскольку $0{,}2y$ — целое число, y делится на 5. Положим $x=4x_1$, $y=5y_1$. Небольшой перебор показывает, что уравнение $4x_1+5y_1=22$ имеет единственное решение в натуральных числах: $x_1=3$, $y_1=2$. Значит, $x=4x_1=12$.

3. (**12 б.**) Даны окружности с центрами A и B и радиусами 6 и 3 соответственно. Общая внутренняя касательная к этим окружностям касается их в точках C и D соответственно. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, причём $AE=10$. Чему равна длина отрезка CD?

Ответ: 12.

Решение. ACE и BDE — подобные прямоугольные треугольники с коэффициентом подобия $\frac{AC}{BD}=2$. По теореме Пифагора, $CE=8$. Отсюда $DE=4$ и $CD=CE+ED=12$.

4. (**12 б.**) Пусть $\operatorname{tg} x=5$. Вычислите $\dfrac{2\sin x+4\cos x}{\cos x-3\sin x}$.

Ответ: -1.

Решение. $\dfrac{2\sin x+4\cos x}{\cos x-3\sin x}=\dfrac{2\operatorname{tg} x+4}{1-3\operatorname{tg} x}=\dfrac{2\cdot 5+4}{1-3\cdot 5}=-1.$

5. (**13 б.**) В окружность радиуса 13 вписана трапеция с основаниями 24 и 10. Найдите площадь трапеции, если известно, что она (площадь) меньше 200.

Ответ: 119.

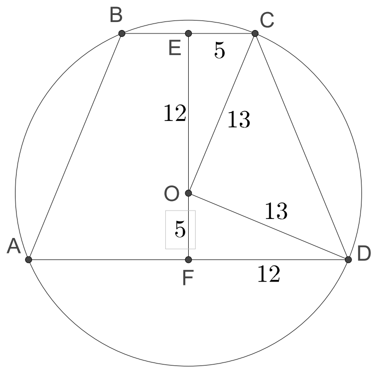

Рис. 1

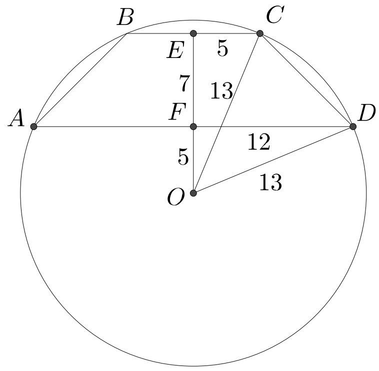

Рис. 2

В зависимости от того, лежит центр окружности внутри данной трапеции или нет, имеем две возможные конфигурации. В первом случае (рис. 1) высота трапеции $EF = EO + OF = 12 + 5 = 17$, а площадь равна $\frac{24+10}{2} \cdot 17 = 289$, что не удовлетворяет условию задачи. Во втором случае (рис. 2) высота трапеции $EF = EO - OF = 12 - 5 = 7$, а площадь равна $\frac{24+10}{2} \cdot 7 = 119$.

6. (**13 б.**) Пусть $y = f(x)$ — нечётная функция, причём при $x \geqslant 0$

$$f(x) = (2x^2 + x)(x^2 - 5x + 6).$$

Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0$?

Ответ: 5.

Решение. Уравнение имеет два положительных корня (2 и 3) и, в силу нечётности функции, столько же отрицательных. Число 0 также является корнем уравнения. Всего 5 корней.

7. (**14 б.**) Найдите произведение корней уравнения

$$(x^2 + 3x - 4)^3 + (5x - 2x^2 - 3)^3 = (8x - x^2 - 7)^3.$$

Ответ: -42.

Решение. Заметим, что скобка в правой части уравнения есть сумма скобок в его левой части. Пусть $y = x^2 + 3x - 4$; $z = 5x - 2x^2 - 3$. Относительно новых переменных получим уравнение

$$y^3 + z^3 = (y + z)^3;\ y^3 + z^3 = y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3;\ 3yz(y + z) = 0,$$

которое равносильно совокупности $\left[\begin{array}{rcl} y & = & 0; \\ z & = & 0; \\ y+z & = & 0. \end{array}\right.$ Таким образом, нужно каждую из трёх скобок приравнять к нулю. Получится совокупность трёх квадратных уравнений. Корни этих уравнений: $1, -4; 1, \frac{3}{2}; 1, 7$.

8. (**14 б.**) Имеются 900 бусинок, пронумерованных числами от 1 до 900. Удаляют все бусинки, номера которых являются точными квадратами (1, 4, 9, …, 900). Оставшиеся бусинки нумеруются заново начиная с 1. Затем операция повторяется. Сколько раз должна быть выполнена операция, чтобы осталась одна бусинка?

Ответ: 58.

Решение. Если в какой-то момент у нас n^2 бусинок, то удаляется n бусинок, а из оставшихся n^2-n бусинок на следующем шаге будет удалено $n-1$ бусинок (т. к. $(n-1)^2 < n^2 - n < n^2$) и останется $(n-1)^2$ бусинок. Таким образом, за две операции осуществляется переход от n^2 к $(n-1)^2$. От 30^2 до 1^2 будет сделано 29 переходов, на что понадобится 58 операций.

2 блок

1. (**10 б.**) По дороге, ведущей из леса в посёлок, спешат Красная Шапочка и волк, а навстречу им идут (порознь, конечно) бабушка и охотник. Скорость сближения волка и бабушки 16 км/ч, Красной Шапочки и бабушки 9 км/ч, охотника и Красной Шапочки 13 км/ч. С какой скоростью (в км/ч) сближаются волк и охотник?

Ответ: 20.

Решение. Пусть скорости Красной Шапочки, волка, бабушки и охотника равны соответственно a, b, c и d. Тогда $b+c = 16$, $a+c = 9$, $d+a = 13$. Нужно вычислить $b + d$. Имеем

$$b + d = (b + c) + (a + d) - (a + c) = 16 + 13 - 9 = 20.$$

2. (**12 б.**) Две бригады должны были по плану отремонтировать 23 мотора. Первая бригада перевыполнила план на 25%, а вторая — на 20%. Сколько моторов по плану должна была отремонтировать вторая бригада?

Ответ: 15.

Решение. Пусть план первой бригады x, а второй y. Поскольку $0{,}25x$ — целое число, x делится на 4. Поскольку $0{,}2y$ — целое число, y делится на 5. Положим $x = 4x_1$, $y = 5y_1$. Небольшой перебор показывает, что уравнение $4x_1 + 5y_1 = 23$ имеет единственное решение в натуральных числах: $x_1 = 2$, $y_1 = 3$. Значит, $y = 5y_1 = 15$.

3. (**12 б.**) Даны окружности с центрами A и B и радиусами 12 и 24 соответственно. Общая внутренняя касательная к этим окружностям касается их в точках C и D соответственно. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, причём $AE = 13$. Чему равна длина отрезка CD?

Ответ: 15.

Решение. ACE и BDE — подобные прямоугольные треугольники с коэффициентом подобия $\frac{BD}{AC} = 2$. По теореме Пифагора, $CE = 5$. Отсюда $DE = 10$ и $CD = CE + ED = 15$.

4. (**12 б.**) Пусть $\operatorname{tg} x = 4$. Вычислите $\dfrac{2\sin x + 3\cos x}{\cos x - 3\sin x}$.

Ответ: -1.

Решение. $\dfrac{2\sin x + 3\cos x}{\cos x - 3\sin x} = \dfrac{2\operatorname{tg} x + 3}{1 - 3\operatorname{tg} x} = \dfrac{2\cdot 4 + 3}{1 - 3\cdot 4} = -1.$

5. (**12 б.**) В окружность радиуса 13 вписана трапеция с основаниями 24 и 10. Найдите площадь трапеции, если известно, что она (площадь) больше 200.

Ответ: 289.

Решение. См. выше (в 1 блоке).

6. (**13 б.**) Пусть $y = f(x)$ — чётная функция, причём при $x \geqslant 0$

$$f(x) = (2x^2 - x)(x^2 - 5x + 6).$$

Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0$?

Ответ: 7.

Решение. Уравнение имеет три положительных корня ($\frac{1}{2}$, 2 и 3) и, в силу нечётности функции, столько же отрицательных. Число 0 также является корнем уравнения. Всего 7 корней.

7. (**14 б.**) Найдите произведение корней уравнения

$$(x^2 - 3x + 2)^3 + (x^2 - 7x + 12)^3 = (2x^2 - 10x + 14)^3.$$

Ответ: 24.

Решение. Заметим, что скобка в правой части уравнения есть сумма скобок в его левой части. Пусть $y = x^2 - 3x + 2;\ z = x^2 - 7x + 12$. Относительно новых переменных получим уравнение

$$y^3 + z^3 = (y+z)^3;\ y^3 + z^3 = y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3;\ 3yz(y+z) = 0,$$

которое равносильно совокупности $\left[\begin{array}{rcl} y & = & 0; \\ z & = & 0; \\ y+z & = & 0. \end{array}\right.$ Таким образом, нужно каждую из трёх скобок приравнять к нулю. Получится совокупность трёх квадратных уравнений. Корни первого и второго уравнений: $1, 2; 3, 4$, а у третьего уравнения нет действительных корней.

8. (**15 б.**) Сколько способов составить четыре двузначных простых числа, в которых каждая из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 встречается ровно один раз?

Ответ: 4.

Решение. Двузначные простые числа могут оканчиваться только на цифры 1, 3, 7 или 9. Перед 1 и 7 могут стоять только цифры 4 или 6. Здесь возможно только два варианта (41 и 67 или 61 и 47). Значит, перед 3 и 9 могут быть только цифры 2 или 5. Здесь также имеем лва варианта (23 и 59 или 53 и 29). Всего получаем $2 \cdot 2 = 4$ способа составить нужные числа.