Муниципальный этап областной олимпиады школьников по математике
2020–2021 учебный год

Решения задач. Критерии оценивания

7 класс

1. Расстояние между городами A и B 435 км. Из A выехал поезд со скоростью 45 км/ч. Через 40 мин навстречу ему из города B со скоростью 55 км/ч выехал другой поезд. На каком расстоянии друг от друга они будут за час до встречи?

Ответ: Поезда сближаются со скоростью 100 км/ч. Поэтому за последний час они вместе проедут 100 км. Такое расстояние и будет между ними за час до встречи.

Оценивание. За верное решение 7 б.

2. Петя говорит, что если a^5 делится на b^2, где a и b — натуральные числа, то a^2 делится на b. Докажите, что он неправ, приведя опровергающий пример.

Решение. Простейший контрпример $a = 4$, $b = 32$.

Оценивание. За верный пример 7 б.

3. Сколько способов переставить буквы слова ГЕОМЕТРИЯ, чтобы никакие две согласные буквы не стояли рядом?

Ответ: 21600.

Решение. Сначала расставим гласные буквы, среди которых две буквы Е. Переставить их можно $5!/2 = 60$ способами. Теперь образуется 6 мест, на которые можно ставить согласные буквы (на каждом месте не более одной согласной) — это четыре промежутка между гласными, а также места спереди и сзади. Букву Г ставим на любое из 6 мест. Теперь для М доступны 5 мест. После этого место для Т выбираем 4 способами, и наконец для Р тремя способами. По правилу произведения всего $60 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 21600$.

Оценивание. За верное решение 7 б. За арифметическую ошибку (при верном рассуждении) минус балл. Если неверно подсчитано число перестановок гласных букв, но верно выполнена вторая часть решения, 2 б.

4. В классе учится 15 учеников. На дом им задали 6 задач по геометрии. Каждую задачу решило больше половины учеников класса.

Докажите, что найдутся два ученика, которые (в совокупности) решили все 6 задач.

Решение. Каждую задачу решило не менее 8 учеников, а всего было решено не менее $8 \cdot 6 = 48$ задач. В среднем на каждого пришлось не менее $\frac{48}{15} = 3\frac{1}{3}$ задач. Значит, есть ученик A, решивший не менее 4 задач. Если он решил все 6 задач, то доказывать нечего. Если 5, то к нему в пару можно добавить любого ученика, решившего оставшуюся задачу.

Пусть ученик A решил ровно 4 задачи. Тогда на 2 оставшиеся приходится не менее 16 решений, которые предъявили 14 оставшихся учеников. Кто-то из них решил обе эти задачи (иначе будет всего не более 14 решений этих задач).

Оценивание. За верное решение 7 б.

5. Среди пяти монет одна фальшивая. Настоящие монеты одной массы, а фальшивая другой массы. Имеются чашечные весы, которые работают так: при равенстве масс взвешиваемых грузов любая из чашек может опуститься вниз; когда же массы различны, весы работают правильно. Можно ли с помощью таких весов гарантированно определить фальшивую монету и установить при этом, легче она или тяжелее остальных?

Ответ: Можно.

Решение. Приведём алгоритм (не оптимальный по числу взвешиваний), позволяющий решить задачу.

Пусть на первой чашке общий груз массой a, а на второй b. Если при этом первая чашка опустилась вниз, то $a \geqslant b$. Будем говорить, при этом, что первая чашка тяжёлая, а вторая лёгкая.

Сначала будем попарно сравнивать по весу монеты. Если какая-то монета побывала и на более лёгкой чашке, и на более тяжёлой, то она заведомо настоящая.

Монету, которая каждый раз оказывалась на лёгкой (тяжёлой) чашке, будем называть лёгкой (соответственно тяжёлой). Ясно, что одновременно двух лёгких монет быть не может, как и двух тяжёлых.

Ясно также, что фальшивая монета или лёгкая, или тяжёлая.

Если по результатам взвешиваний не обнаружилось тяжёлой монеты, то лёгкая и есть фальшивая (более лёгкая, чем остальные). Если по результатам взвешиваний не обнаружилось лёгкой монеты, то тяжёлая и есть фальшивая (более тяжёлая, чем остальные).

Остался случай, когда выявились и лёгкая, и тяжёлая монеты. Положим их на одну чашку, а на другую любые две из оставшихся монет (они заведомо настоящие). Взвешивание покажет, какая же из двух монет фальшивая.

Оценивание. За верное решение 7 б.