Муниципальный этап олимпиады школьников по математике
Ноябрь 2014 г.
Решения задач

8 класс

1. Часы показывают ровно 12 часов. Через какое время минутная стрелка снова догонит часовую стрелку?

Ответ: через $1\frac{1}{11}$ ч.

Решение. Угловая скорость минутной стрелки $360°$/ч, а часовой — в 12 раз меньше: $30°$/ч. Поэтому минутная стрелка догоняет часовую с угловой скоростью $330°$/ч и отставание в $360°$ она ликвидирует за $\frac{360}{330} = 1\frac{1}{11}$ ч.

Оценивание. За верное решение 7 б. Если решение найдено в виде $1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12^2} + \ldots$, но ряд не просуммирован, 4 б.

2. На столе лежат семь карточек. За один ход разрешается перевернуть любые пять. Какое наименьшее число ходов необходимо совершить, чтобы перевернуть все карточки? (Приведите соответствующий пример и докажите, что за меньшее число ходов, чем в вашем примере, перевернуть все карточки не удастся.)

Ответ: 3.

Решение. После первого хода есть неперевёрнутые карточки, а после второго есть карточки, перевёрнутые дважды. Значит, за два хода перевернуть все карточки не удастся. А за три хода можно. Например, переворачиваем карточки с номерами 1, 2, 3, 4, 5; 1, 2, 3, 4, 6; 1, 2, 3, 4, 7. При этом каждая карточка переворачивается один или три раза.

Оценивание. За пример — 4 балла, за доказательство того, что нельзя за два хода — 3 б.

3. Через вершину D параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, отсекающая 1/100-ю часть от стороны AB, считая от вершины A. Какую часть от диагонали AC отсекает та же прямая?

Ответ: $\frac{1}{101}$.

Решение. Обозначим $n = 100$.

1-й способ. Пусть прямая пересекает диагональ в точке K, а сторону AB в точке N. По условию, $\frac{AN}{AB} = \frac{1}{n}$. Треугольники AKN и CKD подобны (их соответствующие стороны параллельны). Поэтому

$$\frac{AK}{KC} = \frac{AN}{CD} = \frac{AN}{AB} = \frac{1}{n}.$$

Отсюда $\frac{AK}{KC} = \frac{1}{n+1}$.

2-й способ. Разобьём стороны AB и DC на n равных частей, после чего соединим эти точки, а также точку B отрезками, параллельными AN.

Из теоремы Фалеса следует, что диагональ делится этими отрезками на равные отрезки; количество этих отрезков $n+1$.

Оценивание. За верное решение 7 б.

4. Существуют ли такие целые числа m и n, что $2014 = \dfrac{m^5}{n^6}$?

Ответ: да, например $n = 2014^5$, $m = 2014^4$.

Оценивание. За верный пример 7 б. Только ответ (без примера) — 0 б.

5. На доске записано несколько чисел. Учитель попросил Мишу поделить каждое из чисел на сумму всех остальных. У Мити было другое задание: делить квадрат каждого числа на сумму остальных чисел. Сумма чисел, полученных Мишей, оказалась равной 1. Какой может быть сумма чисел, вычисленных Митей?

Ответ: 0.

Решение. Если сумма Митиных чисел может быть не равной нулю, то она может быть любым наперёд заданным ненулевым числом, поскольку при умножении всех записанных на доске чисел на число $k \neq 0$ Мишина сумма не меняется, а Митина умножается на k. Однако результаты вычислений Мити всегда приведут к одному ответу...

Пусть на доске записаны числа a_1, a_2, ..., a_n. Обозначим

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \quad S_i = S - a_i \, (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Заметим, что

$$\frac{a_i^2}{S_i} = -a_i + \frac{a_i S}{S - a_i}.$$

Просуммировав n таких равенств (при $i = 1, 2, \ldots, n$), получим, что Митина сумма равна

$$-(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + S\left(\frac{a_1}{S - a_1} + \frac{a_2}{S - a_2} + \ldots + \frac{a_n}{S - a_n}\right) = -S + S = 0,$$

поскольку во второй паре скобок оказалась как раз Мишина сумма.

Оценивание. За верное решение 7 б. За верный ответ (без достаточного обоснования) 2 б.