Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике 2017-2018 учебный год 11 класс Максимальный балл – 35

1. При регистрации на сайте компьютерной игры Петя предложил пароль IVANOV2003. Однако компьютер указал, что этот пароль слишком простой, и предложил изменить его, поменяв порядок следования символов. Петя согласился, однако забыл записать новый пароль. Он запомнил лишь, что пароль начинался и заканчивался буквой, и никакие две цифры не стояли рядом. Сколько различных паролей (в наихудшем случае) придется перебрать Пете, чтобы гарантированно войти в игру? (цифра 0 и буква O – различные символы).

Ответ: 21600.

Решение. Из условия следует, что ровно две буквы стоят рядом. Для этого имеется 5 возможностей (рядом стоят первая и вторая, вторая и третья, и т.д.). Переставить буквы (на выбранных для них местах) можно $\frac{6!}{2}$ способами (пополам – потому что перестановка двух букв V) не меняет пароль. Аналогично, переставить цифры можно $\frac{4!}{2}$ способами.

Итого: $5\cdot\frac{6!}{2}\cdot\frac{4!}{2}$ =21600.

Оценивание: За неучет наличия одинаковых символов – давать не более 3 баллов. Аккуратного обоснования «правила умножения» не требовать. За арифметические ошибки – снять по баллу за каждую.

2. Луч лазера, направленный параллельно стороне угла в 7°, отражается от его зеркальных стенок. Сколько всего будет отражений?

Ответ: 25.

Решение. Вместо отражения луча, будем отражать угол (а луч продолжать прямолинейно в «зазеркалье»). Всего в полуплоскости (угле в 180°) угол в 7° умещается 25 раз; столько и будет отражений.

Оценивание. Полное решение – 7 баллов. За решение, в котором аккуратно считаются углы – полный балл; при ошибках в арифметике – снять 1-2 балла.

3. В сети магазинов «Пятнадцатёрочка» (состоящей из 16 магазинов, занумерованных числами от 1 до 16) проводится акция: покупателю, сделавшему покупку на сумму свыше 555 рублей, вручается ластик в форме гнома. Гномов различных видов – пятнадцать (и они также нумеруются числами от 1 до 15); покупателю, собравшему полный набор из гномов всех видов, полагается Приз. Программист Петя написал программу, распределяющую коробки с гномами (в каждой коробке - гномы только одного вида) по магазинам: в магазин с номером k поставляется количество коробок с гномами вида j, равное остатку от деления числа $7k+jx$ на 17. Может ли менеджер сети выбрать параметр «x» (целое число от 1 до 16) так, что ни в один из 16 магазинов не поступят гномы всех 15 видов?

Ответ: Не может.

Решение. Пусть k равно остатку от деления числа $5x$ на 17 (это число в диапазоне от 1 до 16). Тогда в этом магазине гномов вида j будет (пренебрегая числами, кратными 17)

$$7k + xj = 35x + xj = x + xj = x\,(1 + j).$$

Это число не делится на 17 при всех x от 1 до 16, и всех j от 1 до 15.

Оценивание. Полное решение – 7 баллов. За правильный ответ с частичным обоснованием (явная проверка при некоторых x – но не всех!) k – от 1 до 3 баллов. За правильный ответ (без каких-либо обоснований) 0 баллов.

4. Сколько решений на отрезке $[0, 2\pi]$ имеет уравнение

$$3\cos(x) + 2\cos(3x) + \cos(5x) = 0$$

Ответ: 10.

Решение-1. Домножая на $4\sin^2(x)$ получим:

$$4\sin^2(x)\cdot(3\cos(x) + 2\cos(3x) + \cos(5x))=$$
$$= 2\sin(x)\cdot(6\sin(x)\cos(x) +4\sin(x)\cos(3x)+2\sin(x)\cos(5x))=$$
$$= 2\sin(x)(3\sin(2x) +2(\sin(4x) – \sin(2x)) +(\sin(6x) – \sin(4x)))=$$
$$= 2\sin(x)\cdot(\sin(2x)+ \sin(4x)+\sin(6x))=$$
$$= 2\sin(x)\sin(2x)+ 2 \sin(x)\sin(4x)+2\sin(x)\sin(6x)=$$
$$= \cos(x)-\cos(3x)+ \cos(3x)- \cos(5x)+ \cos(5x)- \cos(7x)=$$
$$= \cos(x)- \cos(7x)= 2 \sin(3x)\sin(4x) =0$$

Последнее уравнение легко решается, и имеет 7+5=12 корней на интервале $(0, 2\pi)$. Однако, при домножении, мы приобрели лишние решения (нули синуса): прямая проверка показывает, что все они (в частности, концы отрезка, а также и точка π) не удовлетворяют исходному уравнению. Так что, остается 12-2=10 корней.

Решение-2. Будем применять формулу преобразования суммы косинусов в произведение:

$$2(\cos x+\cos 3x)+(\cos x+\cos 5x)=4\cos 2x\cdot\cos x+2\cos 3x\cdot\cos 2x=0;$$
$$\cos 2x(2\cos x+\cos 3x)=\cos 2x(\cos x+2\cos 2x\cdot\cos x)=0;$$
$$\cos 2x\cdot\cos x(2\cos 2x+1)=0.$$

Решив простейшие уравнения $\cos x=0,\ \cos 2x=0$ и $\cos 2x=-\frac{1}{2}$,

находим корни исходного уравнения на указанном промежутке:

$$\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{4\pi}{3},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{3},\frac{7\pi}{4}.$$

Оценивание. Полное решение – 7 баллов. За лишние корни: снять по баллу за каждое лишнее. За частичные (угаданные) корни: 1-2 балла.

5. Куб с ребром 9 разбит на единичные кубики. Луч лазера пробил куб насквозь, и прошел через центральную точку куба. Входное отверстие оказалось на нижней грани куба, в центре наружной грани кубика, соседнего с угловым. Сколько кубиков повредил луч? (кубик поврежден, если луч содержит хотя бы одну его точку).

Ответ: 22.

Решение. 1.Рассмотрим проекции куба на грани (сторона кубика равна 1)

А) На боковую: проекция (отрезка) луча в кубе на грань – начинается в точке $(\frac{3}{2}, 0)$, и заканчивается в точке $(9 - \frac{3}{2}, 9)$. Проекции на ось Ox точек пересечения этого отрезка с горизонтальными прямыми отстоят друг от друга на $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, так что все они – не целые. Поэтому, проекция луча не проходит через вершины сетки = проекции ребер кубиков, перпендикулярных грани.

Б) На другую боковую: аналогично, начало в точке $(\frac{1}{2}, 0)$, конец – в точке $(9 - \frac{1}{2}, 9)$, шаг $\frac{8}{9}$, нет целых точек.

В) На основание: аналогично, начало в точке $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$, конец – в $(9 - \frac{3}{2}, 9 - \frac{1}{2})$, уравнение прямой $y = \frac{4}{3}x - \frac{3}{2}$, при целых x , y не будет целым.

Эти рассуждения показывают, что луч не проходит через ребра (и вершины) кубиков.

2. Луч пересекает 6 вертикальных плоскостей (которыми куб поделен на кубики), 7 – других вертикальных, и 8 горизонтальных, всего 21 плоскость. Пересечение каждой из плоскостей означает, что луч переходит из одного кубика в другой (через внутреннюю точку одной из граней кубика). Поэтому луч побывает в 22 кубиках.

Оценивание. Полное решение – 7 баллов. За правильный ответ без обоснования – 1 балл. За отсутствие обоснования «луч не проходит через ребра кубиков» – снять 2 балла.