

## 11 класс

### 1. Мощность в пространстве

На изначально покоящийся на гладком горизонтальном столе брусок массы  $m = 2$  кг, начали действовать постоянной горизонтальной силой  $F$ . В результате была получена зависимость мощности  $N$  от перемещения  $s$  бруска. Некоторые измерения могли оказаться не очень точными.

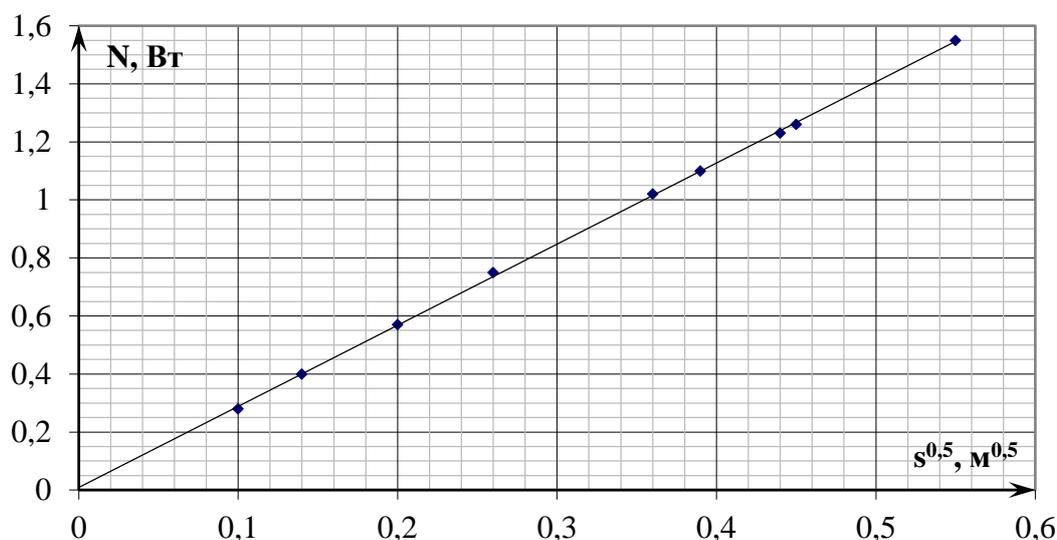
- В каких координатных осях экспериментальная зависимость мощности от перемещения линейна?
- Определите мощность силы в точке с координатой  $s_0 = 10$  см.
- Найдите значение силы  $F$ .

$N$ , Вт	0,28	0,40	0,57	0,75	1,02	1,10	1,23	1,26	1,50
$s$ , см	1,0	2,0	4,0	7,0	13	15	19	20	30

### Возможное решение

Гордеев З.

Так как  $N = Fv$  и работа силы  $A = Fs = \frac{mv^2}{2}$ , то  $N = \sqrt{\frac{2F^3 s}{m}}$  и ожидается линейная зависимость  $N(\sqrt{s})$ . Линейная зависимость будет и в логарифмических координатах.



Построим график  $N(\sqrt{s})$  по табличным данным. Проведем через нанесённые точки наилучшую прямую из начала координат.

В точке с координатой  $s = 10$  см мощность должна составлять 0,89 Вт. По угловому

коэффициенту наклона графика  $k = \frac{\Delta N}{\sqrt{\Delta s}} = \sqrt{\frac{2F^3}{m}} \approx 2,8 \text{ Вт/м}^{1/2}$  определяем значение силы

$$F = \sqrt[3]{k^2 m / 2} \approx 2,0 \text{ Н.}$$

Сегодня, 20 января, на портале [online.mipt.ru](http://online.mipt.ru) составители данного комплекта проведут онлайн-разбор решений задач. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 16.00; 8 класс – 17.00; 9 класс – 18.30; 10 класс – 20.00; 11 класс – 19.00. Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале [online.mipt.ru](http://online.mipt.ru)

### Критерии оценивания

- Вывод теоретической зависимости  $N(s)$  **2 балла**
- Выбор осей  $N(\sqrt{s})$  или  $N^2(s)$ , в которых зависимость линейна **1 балл**
- Построение графика в осях  $N(\sqrt{s})$  **3 балла**
  - Если построен криволинейный график **1 балл**
- Нахождение мощности в точке  $s = 10$  см **1 балл**
  - интерполяция на криволинейном графике **0 баллов**
- Нахождение углового коэффициента графика **1 балл**
- Нахождение значения силы **2 балла**

Сегодня, 20 января, на портале **online.mipt.ru** составители данного комплекта проведут онлайн-разбор решений задач. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 16.00; 8 класс – 17.00; 9 класс – 18.30; 10 класс – 20.00; 11 класс – 19.00. Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале **online.mipt.ru**

## 2. «Тёмная материя»

Скопления звёзд образуют бесстолкновительные системы – галактики, в которых звёзды равномерно движутся по круговым орбитам вокруг оси симметрии системы. Галактика NGC 2885 состоит из скопления звёзд в виде шара (ядра радиусом  $r_{\text{я}} = 4$  кпк) и тонкого кольца,



внутренний радиус которого совпадает с радиусом ядра, а внешний равен  $15 r_{\text{я}}$ . Кольцо состоит из звёзд с пренебрежимо малой по сравнению с ядром массой. В ядре звёзды распределены равномерно.

Было установлено, что линейная скорость движения звёзд в кольце не зависит от расстояния до центра галактики: от внешнего края кольца вплоть до края ядра скорость звёзд  $v_0 = 240$  км/с. Такое явление может быть объяснено наличием несветящейся массы («тёмной материи»), распределенной сферически симметрично относительно центра галактики вне её ядра.

- 1) Определите массу  $M_{\text{я}}$  ядра галактики.
- 2) Определите среднюю плотность  $\rho_{\text{я}}$  вещества ядра галактики.
- 3) Найдите зависимость плотности «тёмной материи»  $\rho_{\text{T}}(r)$  от расстояния до центра галактики.
- 4) Вычислите отношение массы «тёмной материи», влияющей на движение звёзд в диске, к массе ядра.

**Примечание:**  $1$  кпк =  $1$  килопарсек =  $3,086 \cdot 10^{19}$  м, гравитационная постоянная  $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг}^{-2}$ .

Сегодня, 20 января, на портале **online.mipt.ru** составители данного комплекта проведут онлайн-разбор решений задач. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 16.00; 8 класс – 17.00; 9 класс – 18.30; 10 класс – 20.00; 11 класс – 19.00. Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале **online.mipt.ru**

### Возможное решение

Коротков П.

Из уравнения  $\frac{v_0^2}{r_{\text{я}}} = \frac{\gamma M_{\text{я}}}{r_{\text{я}}^2}$  находим массу ядра галактики:  $M_{\text{я}} = \frac{r_{\text{я}} v_0^2}{\gamma} = 1,1 \cdot 10^{41}$  кг.

Средняя плотность материи в ядре галактики  $\rho_{\text{я}} = \frac{M_{\text{я}}}{(4/3)\pi r_{\text{я}}^3} = \frac{3v_0^2}{4\pi\gamma r_{\text{я}}^2} = 1,35 \cdot 10^{-20}$  кг/м<sup>3</sup>.

Вне ядра галактики  $\frac{v_0^2}{r} = \left(\frac{\gamma}{r^2}\right)(M_{\text{я}} + M_{\text{T}}(r))$ . Тогда  $v_0^2 r = \gamma(M_{\text{я}} + M_{\text{T}}(r))$ .

После дифференцирования этого выражения получим:  $v_0^2 dr = \gamma dM_{\text{T}}(r) = \gamma \rho(r) 4\pi r^2 dr$ .

Из последнего уравнения найдём зависимость плотности «тёмной материи»  $\rho_{\text{T}}(r)$  от

расстояния до центра галактики:  $\rho(r) = \frac{v_0^2}{4\pi\gamma r^2} = \frac{M_{\text{я}}}{4\pi r_{\text{я}} r^2}$ .

Масса тёмной материи  $M_{\text{T}} = \frac{15r_{\text{я}} v_0^2}{\gamma} - M_{\text{я}} = 14M_{\text{я}}$ . Этот же результат можно получить и

интегрированием:  $M_{\text{T}} = \int_{r_{\text{я}}}^{15r_{\text{я}}} \rho(r) 4\pi r^2 dr = 14M_{\text{я}}$ .

Таким образом, искомое отношение равно 14.

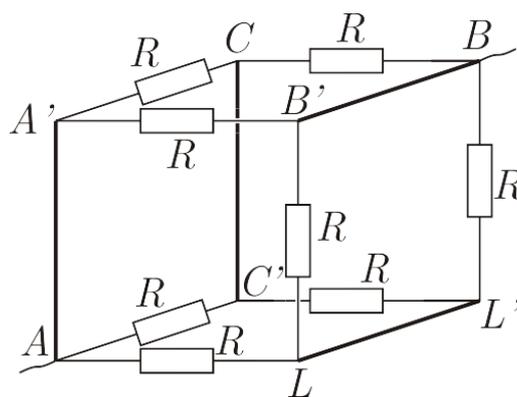
### Критерии оценивания

- |  |                |
|--|----------------|
| 5) Определена масса $M_{\text{я}}$ ядра галактики  | <b>2 балла</b> |
| 6) Определена средняя плотность $\rho_{\text{я}}$ вещества ядра галактики                                | <b>1 балл</b>  |
| 7) Найдена зависимость плотности «тёмной материи» $\rho_{\text{T}}(r)$ от расстояния до центра галактики | <b>4 балла</b> |
| 8) Вычислено отношение массы «тёмной материи», влияющей на движение звёзд в диске, к массе ядра          | <b>3 балла</b> |

Сегодня, 20 января, на портале **online.mipt.ru** составители данного комплекта проведут онлайн-разбор решений задач. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 16.00; 8 класс – 17.00; 9 класс – 18.30; 10 класс – 20.00; 11 класс – 19.00. Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале **online.mipt.ru**

### 3. Четыре в кубе

Куб собран из одинаковых резисторов, имеющих сопротивления  $R$ . Четыре резистора заменены на идеальные перемычки, как указано на рисунке.



- Найдите общее сопротивление получившейся системы между контактами А и В.
- Через какие резисторы сила текущего тока максимальна, а через какие – минимальна? Найдите эти значения силы тока, если сила тока, входящего в узел А равна  $I_0 = 1,2$  А?
- Какова сила тока, текущего через идеальную перемычку АА'?

#### Возможное решение

Изобразим эквивалентную схему и расставим токи в ветвях с учетом закона сохранения заряда и симметрии соединения резисторов.

Силу тока  $I_1$  найдем, приравняв разность потенциалов между узлами А и L для ветвей AL и ACL:

$$I_1 R = IR + (2I - I_1)R, \text{ откуда } I_1 = 3I/2.$$

Аналогичным образом найдём силу тока  $I_2$ :

$$U_0 = I_2 R = I_1 R + IR = 5IR/2, \text{ откуда } I_2 = 5I/2.$$

Сила тока  $I_0 = 2I + I_1 + I_2 = 5I/2 = 6I$ . Отсюда  $I = 0,2$  А.

Теперь легко дать ответы на вопросы задачи.

$$\text{Общее сопротивление цепи равно } R_0 = \frac{U_0}{I_0} = \frac{5IR}{2} \frac{1}{6I} = \frac{5}{12} R.$$

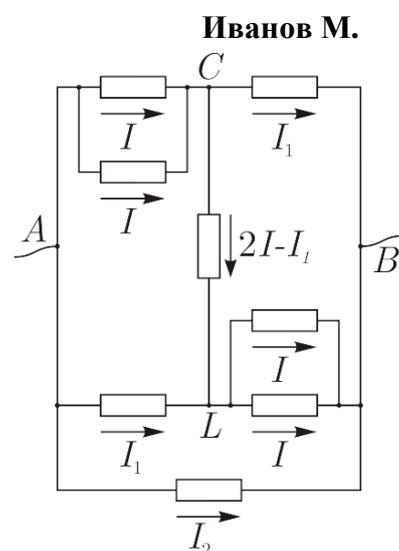
Минимальная сила тока в ветви CL. Она равна  $2I - I_1 = I/2 = 0,1$  А. Максимальная сила тока в ветви А'В':  $I_2 = 0,5$  А.

Сила тока, текущего через идеальную перемычку АА', равна сумме токов через резисторы в ветвях А'С и А'В':

$$7I/2 = 0,7 \text{ А.}$$

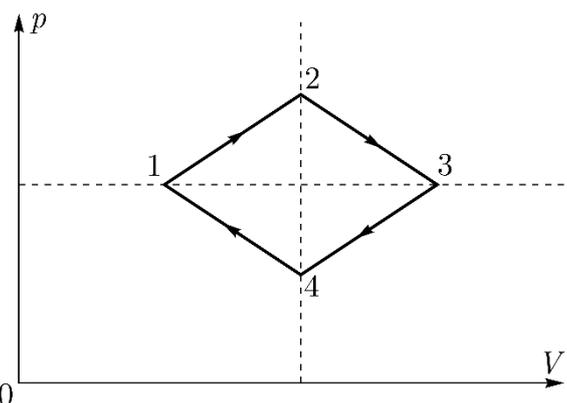
#### Критерии оценивания

- |  |                |
|--|----------------|
| • Правильная эквивалентная схема             | <b>2 балла</b> |
| • Найдены токи через резисторы               | <b>3 балла</b> |
| • Найдено общее сопротивление                | <b>2 балла</b> |
| • Определены максимальные и минимальные токи | <b>2 балла</b> |
| • Найден ток через перемычку                 | <b>1 балл</b>  |



Сегодня, 20 января, на портале [online.mipt.ru](http://online.mipt.ru) составители данного комплекта проведут онлайн-разбор решений задач. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 16.00; 8 класс – 17.00; 9 класс – 18.30; 10 класс – 20.00; 11 класс – 19.00. Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале [online.mipt.ru](http://online.mipt.ru)

**4. Ромб.** Циклический процесс, совершаемый над идеальным газом, на  $(p, V)$  плоскости представляет собой ромб (см. качественный рисунок). Вершины (1) и (3) лежат на одной изобаре, а вершины (2) и (4) – на одной изохоре. За цикл газ совершил работу  $A$ .



Насколько отличается количество теплоты  $Q_{12}$ , подведённой к газу на участке 1-2, от количества теплоты  $|Q_{34}|$ , отведённой от газа на участке 3-4?

**Возможное решение.**

**Слободянин В.**

Количество теплоты, подведённое к газу на участке 1-2 равно  $Q_{1,2} = U_{1,2} + A_{1,2}$ .

Количество теплоты, отведённое от газа на участке 3-4 равно  $|Q_{3,4}| = U_{4,3} + A_{4,3}$ .

Сравним изменения величин внутренних энергий.

Пусть давление в точках 1 и 3 равно  $p_0$ , а объём в точках 2 и 4 равен  $V_0$ . Пусть далее, при переходе из состояния 1 в 2 давление изменяется на  $\Delta p$ , а объём на  $\Delta V$ . Тогда изменение температуры найдём из следующих соображений:

$$\begin{aligned} \nu RT_2 &= p_0 V_0 + V_0 \Delta p; \\ \nu RT_1 &= p_0 V_0 - p_0 \Delta V; \\ \nu R(T_2 - T_1) &= V_0 \Delta p + p_0 \Delta V. \end{aligned}$$

При переходе из состояния 3 в состояние 4 изменение температуры найдём из следующих соображений:

$$\begin{aligned} \nu RT_3 &= p_0 V_0 + p_0 \Delta V; \\ \nu RT_4 &= p_0 V_0 - V_0 \Delta p; \\ \nu R(T_3 - T_4) &= p_0 \Delta V + V_0 \Delta p. \end{aligned}$$

Поскольку  $T_3 - T_4$  равно  $T_2 - T_1$ , то равны между собой и изменения величин внутренней энергии:  $U_{1,2} = U_{4,3}$ .

Работа  $A_{1,2}$  больше работы  $A_{4,3}$  на величину  $A/2$ .

Следовательно, и количество теплоты, подведённой к газу на участке 1-2, больше количества теплоты, отведённой от газа на участке 3-4, на  $A/2$ .

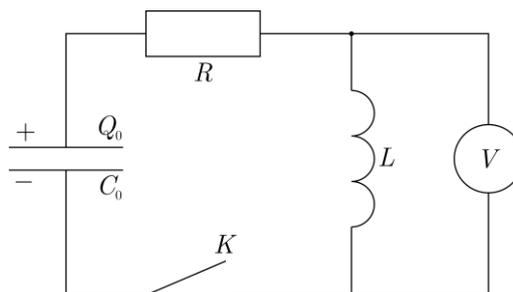
Сегодня, 20 января, на портале **online.mipt.ru** составители данного комплекта проведут онлайн-разбор решений задач. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 16.00; 8 класс – 17.00; 9 класс – 18.30; 10 класс – 20.00; 11 класс – 19.00. Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале **online.mipt.ru**

### Критерии оценивания

1. Использовано 1-е начало термодинамики для участков 1-2 и 3-4 цикла **1 балл**
2. Показано, что изменения температуры на участках 1-2 и 3-4 одинаковы (по модулю) **4 балла**
3. Сделан вывод о том, что изменения внутренней энергии на участках 1-2 и 3-4 равны (по модулю) **1 балл**
4. Показано, что модули работы на участках 1-2 и 3-4 отличаются на  $A/2$  **3 балла**
5. Записан окончательный результат **1 балл**

### 5. Колебаниям – нет!

В электрической цепи (см. рис.), состоящей из резистора сопротивлением  $R$ , катушки индуктивностью  $L$ , на конденсаторе емкостью  $C_0$  находится заряд  $Q_0$ . В некоторый момент времени замыкают ключ  $K$  и одновременно начинают изменять емкость конденсатора так, что идеальный вольтметр показывает постоянное напряжение.



- 1) Как зависит от времени емкость конденсатора  $C(t)$  при изменении  $t$  от 0 до  $t_1 = \sqrt{C_0 L}$ ?
- 2) Какую работу за время  $t_1$  совершили внешние силы? Считайте, что  $t_1 = L/R = \sqrt{C_0 L}$ .

**Подсказка.** Количество теплоты, выделившейся на резисторе за время  $t_1$ ,

$$\text{равно } W_R = \int_0^{t_1} I^2(t) R dt = \frac{Q_0^2}{3C_0}.$$

### Возможное решение.

**Осин М.**

В начальный момент времени ток в цепи не течёт, поэтому  $U_L = U_C = \frac{Q_0}{C_0}$ .

Поскольку  $U_L = L \frac{dI}{dt}$  и остается постоянным (по условию), то:  $I = \frac{Q_0}{C_0 L} t$ .

По закону Ома для полной цепи

$$U_C = U_L + RI(t) = L \frac{dI}{dt} + RI(t) = \frac{Q_0}{C_0} + \frac{Q_0 R}{C_0 L} t = \frac{Q_0}{C_0} \left( 1 + \frac{R}{L} t \right).$$

Заряд на конденсаторе изменяется по закону

$$Q(t) = Q_0 - \frac{Q_0}{C_0 L} \int_0^t \tau d\tau = Q_0 \left( 1 - \frac{t^2}{2C_0 L} \right).$$

Этот же результат можно получить, вычислив площадь под графиком зависимости  $I(t)$ .

$$\text{Окончательно, } C(t) = \frac{Q(t)}{U(t)} = C_0 \left( 1 - \frac{t^2}{2C_0 L} \right) / \left( 1 + \frac{Rt}{L} \right).$$

Сегодня, 20 января, на портале **online.mipt.ru** составители данного комплекта проведут онлайн-разбор решений задач. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 16.00; 8 класс – 17.00; 9 класс – 18.30; 10 класс – 20.00; 11 класс – 19.00. Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале **online.mipt.ru**

Искомая работа  $A = W_R + \Delta W_C + \Delta W_L = \frac{Q_0^2}{3C_0} + 0 + \frac{Q_0^2}{2C_0} = \frac{5Q_0^2}{6C_0}$ .

**Примечание.** Условие, что напряжение на индуктивности остается постоянным, может выполняться только конечное время, поэтому в вопросе (1) стоит ограничение  $t < t_1 = \sqrt{C_0 L}$ .

### Критерии оценивания

- |   |         |
|---|---------|
| 1. Получена зависимость $I(t)$                      | 1 балл  |
| 2. Получена зависимость $U(t)$                      | 2 балла |
| 3. Получена зависимость $Q(t)$                      | 2 балла |
| 4. Найдена зависимость $C(t)$                       | 1 балл  |
| 5. Записан закон сохранения энергии                 | 1 балл  |
| 6. Показано, что энергия конденсатора не изменилась | 2 балла |
| 7. Вычислена работа внешних сил                     | 1 балл  |

Сегодня, 20 января, на портале **online.mipt.ru** составители данного комплекта проведут онлайн-разбор решений задач. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 16.00; 8 класс – 17.00; 9 класс – 18.30; 10 класс – 20.00; 11 класс – 19.00. Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале **online.mipt.ru**