Задания заключительного тура
Отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом» 2014-2015 учебного года
Математика, 11 класс

1. Найти наибольшее значение выражения $x-2y$ для $(x;y)$, удовлетворяющих уравнению $4x^2+9y^2=25$.

2. Найти все решения $(x;y)$ уравнения $\left(2\sin(x+y)+3\right)\left(\cos\left(2x-y\right)-1\right)=-10$, лежащие на прямой $6x+5y=15\pi$.

3. Найти зависимость от n числа целых неотрицательных решений уравнения $x_1+x_2+...+x_n=m$ при $m=2$ и $m=3$. При каком n число решений для $m=3$ будет в четыре раза большим, чем число решений для $m=2$?

4. В гостиной находится двое часов с боем, показывающих разное время. Каждый час они производят звуковые сигналы в количестве, на которое указывает часовая стрелка, при этом минутная стрелка направлена на 12. Интервал между сигналами для первых часов 3 сек., для вторых – 4 сек. Часы начали и закончили бой одновременно. Петя, находясь в соседней комнате, насчитал 13 ударов, принимая совпадающие сигналы за один. Какое время показывали первые и вторые часы в момент первого удара боя? Продолжительность одного сигнала мала и ее можно не учитывать, качество сигнала у обоих часов одинаковое.

5. Для всех целых $k<0$ найти целые решения x и y системы уравнений $\begin{cases} x^2+xy^2-ky^2=0 \\ x^2-xy+ky^2=0 \end{cases}$.

6. Волк окружен собаками, расположенными в точках M, N, P и Q на сторонах квадрата $ABCD$, $M\in[A;B], N\in[B;C], P\in[C;D], Q\in[D;A]$ так, что $AM:MB=BN:NC=CP:PD=DQ:QA=1:3$. Волк, находящийся внутри квадрата в точке пересечения прямых MP и NQ, может бежать со скоростью v_w по прямой в любом направлении. Собаки бегают только по сторонам квадрата со скоростью, не превосходящей v_c. Волк может вырваться из окружения, если на границе квадрата встретит не более одной собаки. При каких значениях отношения v_c/v_w волк имеет шанс спастись?

Ответы и решения

1. Если $\varphi\in[0;2\pi]$, то числа $x=\dfrac{5}{2}\cos\varphi$ и $y=\dfrac{5}{3}\sin\varphi$ удовлетворяют уравнению. Тогда

$$x-2y=\frac{5}{2}\cos\varphi-\frac{10}{3}\sin\varphi=\frac{5}{6}\left(3\cos\varphi-4\sin\varphi\right)=\frac{25}{6}\left(\frac{3}{5}\cos\varphi-\frac{4}{5}\sin\varphi\right)=$$
$$=\frac{25}{6}\left(\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi\right)=\frac{25}{6}\cos\left(\varphi+\theta\right),$$

где $\theta = \arccos\frac{3}{5}$. Поскольку наибольшим возможным значением $\cos\left(\varphi+\theta\right)$, $\varphi \in [0;2\pi]$ является 1, то $\left(x-2y\right)_{\max} = \frac{25}{6}$.

2. Поскольку $\left|2\sin(x+y)+3\right| \le 5$, $\left|\cos(2x-y)-1\right| \le 2$, равенство возможно только при

$$\begin{cases} \sin(x+y)=1 \\ \cos(2x-y)=-1 \end{cases} \to \begin{cases} x+y=\frac{\pi}{2}+2\pi m, \\ 2x-y=\pi+2\pi n \end{cases} \to \begin{cases} x=\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}(m+n) \\ y=\frac{2\pi}{3}\left(2m-n\right) \end{cases}, \ m,n \in Z .$$

Подставляя найденные x и y в уравнение прямой, получим

$$3\pi+4\pi(m+n)+\frac{10\pi}{3}\left(2m-n\right)=15\pi \to 32m+2n=36 \to \begin{cases} m=t \\ n=18-16t \end{cases}, t \in Z .$$

Тогда

$$\begin{cases} x=\frac{5\pi}{2}\left(5-4t\right) \\ y=12\pi\left(t-1\right) \end{cases}, t \in Z .$$

3. 1) Обозначим через k_n^m число неотрицательных решений уравнения $x_1+x_2+...+x_n=m$.

Для $m=2$ число решений , для которых $x_i=2$, а $x_j=0,\ j\ne i$ равно $C_n^1=n$. Число решений, для которых $x_i=1,\ x_j=1,\ x_k=0, k\ne i,j$, равно $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$. Тогда

$$k_n^2=n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}=C_{n+1}^2.$$

Для $m=3$ число решений, для которых $x_i=3$, а $x_j=0,\ j\ne i$ равно $C_n^1=n$. Число решений, для которых $x_i=2,\ x_j=1,\ x_k=0, k\ne i,j$, равно $A_n^2=2!C_n^2=n(n-1)$. Число решений, для которых $x_i=1,\ x_j=1,\ x_k=1,\ x_r=0,\ r\ne i,j,k$, равно $C_n^3=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$. Тогда

$$k_n^3=C_n^1+2C_n^2+C_n^3=n+n(n-1)+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=n+\frac{n(n-1)(n+4)}{6}=$$
$$=\frac{n}{6}(n^2+3n+2)=\frac{n(n+1)(\mathrm{n}+2)}{6}=C_{n+2}^3.$$

2) Условие $k_n^3=4k_n^2$ приводит к равенству $\frac{n(n+1)(\mathrm{n}+2)}{6}=4\cdot\frac{n(n+1)}{2}\to n+2=12\to n=10$

4. Пусть $t_1,\ t_2$ – время на первых и вторых часах. $L=3\cdot(t_1-1)=4\cdot(t_2-1)$ – время от первого до последнего удара часов. $t_1=4k+1, t_2=3k+1, L=12k, k\in Z$. Количество совпадающих сигналов, включая первый и последний, равно $k+1$. Общее число сигналов, услышанных Петей, равно $t_1+t_2-k-1=6k+1=13\to k=2\to t_1=9, t_2=7.$

5. Складываем и вычитаем уравнения

$$\begin{cases} x(2x+y(y-1))=0 \\ y(x(y+1)-2ky)=0 \end{cases} \to 1) x=0\to y=0, \forall\ k<0 \ \ 2)\ y=0\to x=0, \forall\ k<0$$

$$3)\ x\ne 0,\ \ y\ne 0\to \begin{cases} x(y+1)=2ky \\ 2x=-y(y-1) \end{cases} \to \begin{cases} y^2=1-4k \\ x=-\frac{y(y-1)}{2} \end{cases}$$

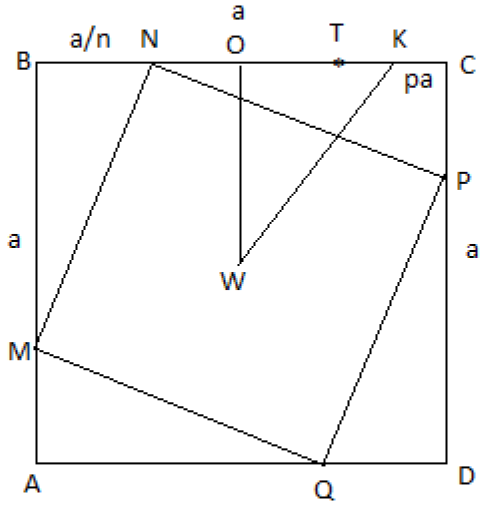
С учетом целочисленности y имеем: $1-4k=m^2, m\in Z\to k=\frac{(1-m)(1+m)}{4}<0\to |m|>1.$

Целочисленность k достигается только при нечетном m, т.е. $m=2l+1,\ l\ne 0,-1,\ l\in Z$. При $k=-l(l+1),\ l\ne 0,-1,\ l\in Z$, помимо $x=0, y=0$, система имеет решения:

$$\begin{cases} y_1 = m = 2l+1, \\ x_1 = -l(2l+1) \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y_2 = -m = -2l-1 \\ x_2 = -(l+1)(2l+1) \end{cases}$$

При $k<0, k\in Z, k\neq -l(l+1), \forall l\in Z$ имеется только нулевое решение.

6.



Пусть $AM:MB=BN:NC=CP:PD=DQ:QA=1:n$, $a-$ сторона квадрата $ABCD$, волк находится в точке W - центре квадрата $MNPQ$. Точка T на стороне BC определена условием $NT=TC+CP=a/2$, $TC=\dfrac{n-2}{2n}a$, $K-$ точка выхода волка на границу квадрата, $KC=p\cdot a$, $p-$ параметр.

Случай 1. $K\in[T;C]\to p\in\left[0;\dfrac{n-2}{2n}\right]$

$WK=\dfrac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{1-2p+2p^2}$, $NK=\dfrac{a(n-1-pn)}{n}\geq\dfrac{a}{2}$

$t_w=\dfrac{a\sqrt{1-2p+2p^2}}{v_w\sqrt{2}}-$ время попадания волка в точку K,

$t_c=\dfrac{a(n-1-pn)}{nv_c}-$ время появления двух собак в точке K .

$t_w<t_c$ $-$ условие спасения волка. $\dfrac{t_c}{t_w}>1\to\varphi_1(p)=\dfrac{t_c}{t_w}=\dfrac{v_w\sqrt{2}}{nv_c}\cdot\dfrac{n-1-pn}{\sqrt{1-2p+2p^2}}>1$.

Функция монотонно убывает при $p\in\left[0;\dfrac{n-2}{2n}\right]$ (проверяется дифференцированием), поэтому максимум $\varphi(p)$ на отрезке достигается в точке $p=0$.

Если $\varphi_1(0)=\dfrac{v_w(n-1)\sqrt{2}}{nv_c}>1$, то прорыв волка на границе $[K;C]$ возможен при $\dfrac{v_c}{v_w}<\dfrac{(n-1)\sqrt{2}}{n}$.

Случай 2. $K\in[N;T]$, $p\in\left[\dfrac{n-2}{2n};\dfrac{n-1}{n}\right]$

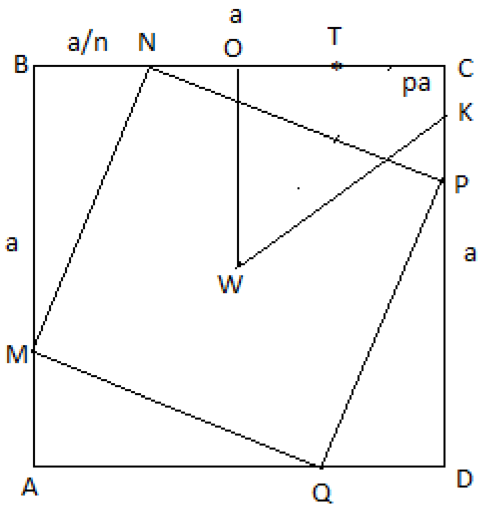
$t_c=(pa+\dfrac{a}{n})/v_c=\dfrac{a(pn+1)}{nv_c}-$ время появления в точке K двух собак,

$t_w=\dfrac{a\sqrt{1-2p+2p^2}}{v_w\sqrt{2}}-$время появления волка в точке K.

$\frac{t_c}{t_w} > 1 \to \varphi_2(p) = \frac{t_c}{t_w} = \frac{v_w\sqrt{2}}{nv_c} \cdot \frac{pn+1}{\sqrt{1-2p+2p^2}} > 1.$

Функция $\varphi_2(p)$ возрастает при $p \in \left[\frac{n-2}{2n}; \frac{n-1}{n}\right]$, поэтому при ее максимум достигается на правом конце отрезка: если $\varphi_2\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{v_w n\sqrt{2}}{v_c\sqrt{n^2-2n+2}} > 1$, то прорыв волка на отрезке $[N;T]$ границы возможен. т.е. если $\frac{v_c}{v_w} < \frac{n\sqrt{2}}{\sqrt{n^2-2n+2}}$ волк может спастись через участок границы $[N;T]$

Случай 3. Участок границы $[C;P]$



$CK = p \cdot a,\ \ p \in \left[0; \frac{1}{n}\right]$, $t_c = (\frac{n-1}{n}a + pa) : v_c = \frac{a(pn+n-1)}{nv_c}$, $t_w = \frac{a\sqrt{2p^2-2p+1}}{v_w\sqrt{2}}$

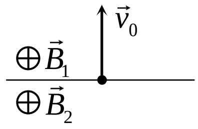
$\frac{t_c}{t_w} > 1 \to \varphi_3(p) = \frac{t_c}{t_w} = \frac{v_w\sqrt{2}}{nv_c} \cdot \frac{n-1+pn}{\sqrt{1-2p+2p^2}} > 1$ хотя бы в одной точке $p \in \left[0; \frac{1}{n}\right]$.

Функция $\varphi_3(p)$ возрастает на отрезке $p \in \left[0; \frac{1}{n}\right], n \geq 2$, поэтому если $\varphi_3\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{nv_w\sqrt{2}}{v_c\sqrt{n^2-2n+2}} > 1$,то волк может покинуть квадрат через отрезок $[C;P]$ границы квадрата, т.е. $\frac{v_c}{v_w} < \frac{n\sqrt{2}}{\sqrt{n^2-2n+2}}$.

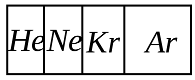
В варианте 1 $n=3$, случай 1 дает условие $\frac{v_c}{v_w} < \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0,94$, случаи 2 и 3 приводят к неравенству $\frac{v_c}{v_w} < \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \approx 1,89$, поэтому волк имеет шанс покинуть квадрат, если $\frac{v_c}{v_w} < \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \approx 1,89$

Задания заключительного тура
Отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом» 2014-2015 учебного года
Физика, 11 класс

1. В двух полупространствах созданы однородные магнитные поля с индукциями $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ ($B_2 = 2B_1$), векторы которых параллельны. Частица с зарядом q и массой m находится на границе раздела полей и имеет скорость $\vec{v}_0$, направленную перпендикулярно границе раздела. Найти среднюю скорость смещения частицы вдоль границы раздела полей за большое время.

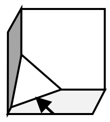


2. Цилиндр объема V разделен тремя подвижными поршнями на четыре отсека, объемы которых относятся как 1:1:1:2 (начиная с левого). В отсеках содержатся гелий He, неон Ne, криптон Kr и аргон Ar. Давление в сосуде p. В некоторый момент поршни становятся полупрозрачными и начинают пропускать молекулы газов, которые были слева (левый поршень пропускает гелий, но не пропускает остальные газы, средний пропускает гелий и неон, но не пропускает криптон и аргон, правый поршень пропускает все газы, кроме аргона). Найти давление в самом правом отсеке и его объем после установления равновесия.

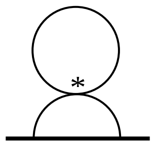


3. Цилиндр из сухого льда (твердой углекислоты) радиусом R и высотой $h = R/2$ стоит на своем основании на плоской поверхности. Лед испаряется так, что с единицы площади в единицу времени с открытой поверхности испаряется масса льда σ. За какое время весь лед испарится? Плотность льда ρ.

4. Из листа фанеры вырезали равносторонний треугольник массой m и поставили его в угол между тремя перпендикулярными поверхностями так, что треугольник касается своими сторонами всех трех граней угла (см. рисунок). Какой минимальной горизонтальной силой нужно действовать на середину нижней стороны треугольника, чтобы он покоился?

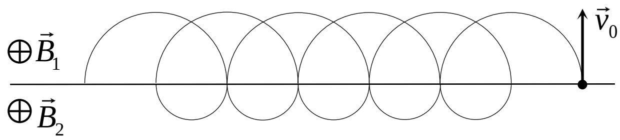


5. На вершину закрепленной полусферы радиуса R ставят шар того же радиуса со смещенным центром тяжести («ванька-встанька»). Центр тяжести шара находится ниже его центра на расстоянии $2R/3$ от центра (см. рисунок; центр тяжести шара показан звездочкой). Будет ли такое положение шара устойчивым? Проскальзывания нет. Ответ обосновать.



Ответы и решения

1. В верхнем и нижнем полупространствах частица будет двигаться по полуокружности с постоянной



скоростью. Однако из-за неодинаковости индукций магнитного поля радиусы этих окружностей

$$R = \frac{mv_0}{qB}$$

будут различными, причем радиус окружности в верхнем полупространстве R_1 будет вдвое больше радиуса окружности в нижнем R_2 (см. рисунок). Поэтому за период частица сдвинется вдоль границы раздела полупространств на расстояние

$$\Delta x = 2\left(R_1 - R_2\right) = \frac{2mv_0\left(B_2 - B_1\right)}{qB_1B_2}$$

За время

$$t = \frac{\pi R_1}{v_0} + \frac{\pi R_2}{v_0} = \frac{\pi\left(R_1 + R_2\right)}{v_0} = \frac{\pi m\left(B_2 + B_1\right)}{qB_1B_2}$$

Поэтому средняя за время одного прохождения частицы по двум полупространствам скорость частицы (или за большое время, включающее в себя много таких прохождений) будет равна

$$v_{cp} = \frac{\Delta x}{t} = \frac{2v_0\left(B_2 - B_1\right)}{\pi\left(B_2 + B_1\right)} = \frac{2v_0}{3\pi}$$

2. Гелий будет распределен по сосуду с одинаковой концентрацией независимо от положения всех поршней. Поэтому парциальное давление гелия на все поршни (и справа и слева) будет одинаковым независимо от их положения. Поэтому при исследовании положений поршней гелий можно не учитывать. А поскольку в самом левом отсеке других газов нет, левый поршень прижмется к стенке сосуда.

По аналогичным причинам при исследовании положения среднего и правого поршней можно не учитывать неон. А поскольку во втором слева отсеке, нет других газов, кроме гелия и неона (которые никак не повлияют на положение второго слева поршня, а справа от него есть криптон, второй поршень также окажется около левой стенки сосуда.

Точно также около левой стенки сосуда находится и третий поршень. Поэтому объем самой левой части сосуда будет равен объему всего сосуда V. Найдем давление газов.

Пусть количество вещества гелия в сосуде равно ν. Тогда, очевидно, что количество вещества неона и криптона также равно ν, аргона - 2ν. Тогда давление газа в сосуде до прохождения газов через перегородки можно найти по закону Клапейрона-Менделеева для газа в любом отсеке

$$p = \frac{\nu RT}{\left(V/5\right)} = \frac{5\nu RT}{V}$$

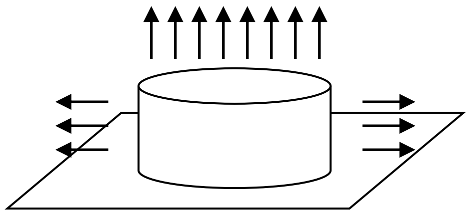
С другой стороны после установления равновесия все четыре газа будут заполнять весь объем сосуда, поэтому по закону Дальтона имеем для конечного давления газа в сосуде p_f

$$p_f = \frac{(\nu+\nu+\nu+2\nu)RT}{V} = \frac{5\nu RT}{V}$$

Отсюда заключаем, что конечное давление в сосуде равно начальному.

3. Испарение цилиндра происходит с верхнего основания и с боковой поверхности. Поэтому с течением времени меняется и площадь основания (из-за бокового испарения), и площадь боковой поверхности (за счет уменьшения радиуса и высоты). Найдем скорость уменьшения размеров цилиндра.

Пусть открытая поверхность углекислоты (с которой и происходит испарение) равна S. Тогда за малое время Δt испарится тонкий слой, толщиной Δh, которую можно найти из очевидного соотношения



$$\sigma S \Delta t = \rho \Delta h S$$

Откуда находим скорость уменьшения размеров углекислоты

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = v = \frac{\sigma}{\rho}$$

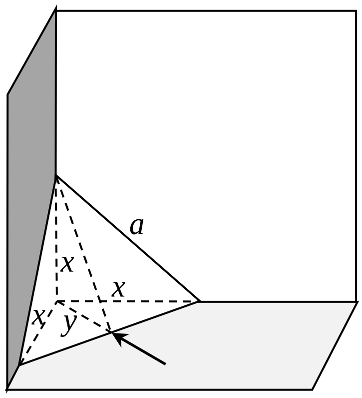
Из этой формулы следует, что скорость уменьшения размеров (но не массовая скорость испарения!) не зависит от площади поверхности, с которой происходит испарение. Это значит, что испарение с боковой поверхности не изменяет скорость уменьшения высоты цилиндра, а испарение с основания – скорость уменьшения его радиуса. Поэтому с боковой поверхности и с основания углекислота испарится за время

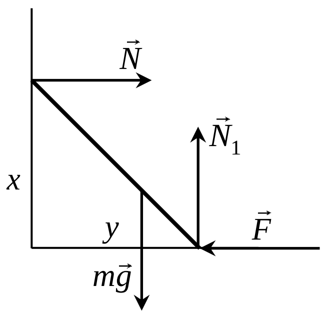
$$t_{бок} = \frac{R}{v} = \frac{R\rho}{\sigma}, \qquad t_{осн} = \frac{h}{v} = \frac{R\rho}{2\sigma}$$

Поскольку время испарения с основания меньше, цилиндр испарится за время

$$t = \frac{R\rho}{2\sigma}$$

4. Очевидно, что в данном положении пластинка взаимодействует с вертикальными стенками угла только в одной точке. Действительно, треугольник может касаться своими сторонами граней угла только в единственном положении; если сдвинуть треугольник вниз на бесконечно малую величину контакт между стенками и сторонами треугольника пропадет, и он будет опираться на ребро угла только своей вершиной, и не опирается боковыми сторонами; на которые, следовательно, не действуют силы реакции со стороны боковых стенок угла. Поэтому на треугольник действуют: две силы реакции (со





стороны ребра и нижней грани угла), сила тяжести, приложенная к центру тяжести – точке пересечения медиан, искомая сила $\vec{F}$.

Геометрически очевидно, что (см. рисунок)

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}}; \qquad y = \frac{a}{2}$$

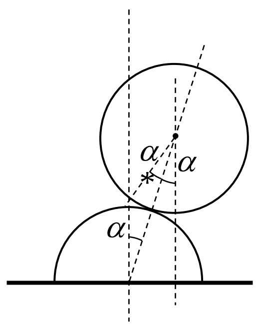
Поэтому условие моментов относительно середины нижней стороны треугольника (с учетом того, что точка пересечения медиан делит каждую медиану в соотношении 2:1) дает

$$Nx = mg\frac{1}{3}y \qquad \Rightarrow \qquad N = \frac{mg}{3\sqrt{2}}$$

А поскольку $F = N$ (это следует из проекции условия сил на горизонтальную ось), то

$$F = \frac{mg}{3\sqrt{2}}$$

5. Отклоним верхний шар от положения равновесия и исследуем вопрос о смещении центра тяжести, если он поднимется, положение равновесия шара будет устойчивым. В начальном состоянии центр тяжести верхнего шара находился на высоте



$$h_0 = 2R - \frac{2}{3}R = \frac{4}{3}R$$

Пусть верхний шар отклонился так, что направление на точку касания шаров составляет малый угол α с вертикалью (см. рисунок). Тогда (поскольку проскальзывания шаров нет) направление на центр тяжести верхнего шара из его центра будет составлять такой же угол α с направлением на новую точку касания. Поэтому высоту нового положения центра тяжести по отношению к основанию нижнего полушара можно найти как

$$h_1 = 2R\cos\alpha - \frac{2}{3}R\cos 2\alpha$$

Используя далее известную тригонометрическую формулу $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2(\alpha/2)$ и учитывая, что для малого угла $\sin\alpha \approx \alpha$, получим

$$h_1 = \frac{4}{3}R - R\alpha^2 + \frac{4}{3}R\alpha^2 = \frac{4}{3}R + \frac{1}{3}R\alpha^2 > h$$

Таким образом, центр верхнего шара при отклонении поднимается, и, следовательно, его положение на «вершине» полушара – устойчивое.