Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников
По математике
2015-2016 учебный год
7 класс
Максимальный балл – 35

1. После каждой стирки кусок мыла уменьшается на 20%. После скольких стирок он впервые уменьшится не меньше чем на треть от первоначальной величины?

Ответ: после двух

Решение

После двух стирок останется

$$0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}64 < \frac{2}{3} \text{ от начального куска}$$

Оценивание: верное решение – 7 баллов

2. Вася записал пятизначное число. Оказалось, что в этом числе среди любых двух цифр больше та, которая стоит правее. Петя умножил это число на 9. Коля подсчитал сумму цифр полученного произведения. Какой может быть эта сумма?

Ответ: 9

Решение

Пусть цифры числа n (слева направо) a, b, c, d, t, e. Заметим, что $9n = 10n - n$. Поскольку $e > d > c > b > a$, при вычитании из $10n$ числа n происходит перенос единицы только из разряда десятков в разряд единиц. Поэтому цифры числа $9n$ (слева направо) таковы: a, $b - a$, $c - b$, $d - c$, $e - 1 - d$, $10 - e$. Сумма этих цифр равна 9.

Оценивание: верное решение – 7 баллов

3. На вечеринке было 20 гостей, 11 из них всегда говорят правду («правдецы»), а остальные 9 всегда лгут («лжецы»). Вокруг круглого стола уселись $n \geq 3$ гостей, каждый из которых заявил: «Ровно один из двух моих соседей – лжец». При каких n это возможно?

Ответ: n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 15

Решение

Во-первых, возможен случай, когда за столом одни лжецы: при этом $n \leq 9$.

Пусть теперь за столом хотя бы один рыцарь. Пусть этот рыцарь А. Его соседи – рыцарь В и лжец С. Тогда с другой стороны от В сидит лжец, а с другой стороны от С – рыцарь. Продолжая эти рассуждения, получаем, что сидящие за столом разбиваются на непересекающиеся тройки, в каждой из которых по два рыцаря и одному лжецу. Поэтому $n = 3k$, и за столом k лжецов и $2k$ рыцарей. Из условия $k \leq 9$ и $2k \leq 11$ следует, что $k \leq 5$. Таким образом, добавляется возможное значение $n = 15$.

Оценивание: верное решение – 7 баллов

4. Пусть a, b, c – натуральные числа, причем число $a{\cdot}b$ делится на $5c$, число $b{\cdot}c$ делится на $13a$, а число $c{\cdot}a$ делится на $31b$. Найдите наименьшее возможное произведение abc.

Ответ: $2015^2 = 4\,060\,225$

Решение

1 способ

$$ab \vdots 5c, bc \vdots 13a \Rightarrow ab^2c \vdots 65ac \Rightarrow b^2 \vdots 65.$$

Если квадрат целого числа n делится на простое число p, то само число n делится на p (иначе его квадрат не был бы кратен p). Поскольку b^2 делится и на 5, и на 13, верно, что тем же свойством обладает и число b. Значит, b делится и на 65.

Аналогично получаем, что $c \vdots 13 \cdot 31$, $a \vdots 5 \cdot 31$. Значит,

$abc \vdots 5 \cdot 31 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 31 = (5 \cdot 13 \cdot 31)^2 = 2015^2 = 4\,060\,225$

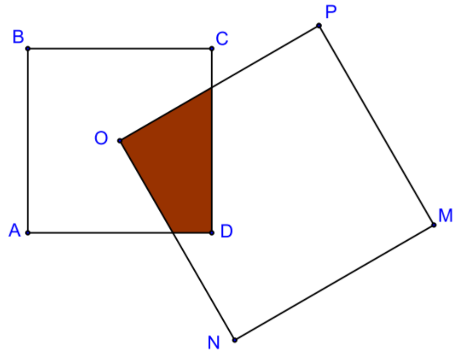
Поэтому $abc \geq 2015^2$. Равенство здесь достигается при a = 5 · 31, b = 5·13, c = 13· 31.

2 способ

Среди делителей чисел a, b и c встречаются 5. 13 и 31. При этом каждый из этих простых делителей встречается не менее двух раз. Действительно. Из условия $ab \vdots 5c$ следует, что хотя бы одно из чисел a или b делится на 5. Аналогичные рассуждения для 13 и 31. Поэтому $abc \vdots (5 \cdot 13 \cdot 31)^2$. Окончательное решение такое же, как в 1 способе.

Оценивание: верное решение – 7 баллов

5. На плоскости расположены два квадрата *ABCD* и *MNOP*.



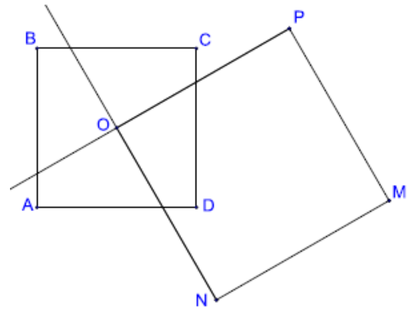
Известно, что *AB* = 4, *MN* = 5, точка *O* – центр квадрата *ABCD*, а отрезки *OP* и *DC* пересекаются под углом 60^0. Найдите площадь общей части двух квадратов.

Ответ: четверть площади квадрата ABCD

Решение

Первый способ

Лучи PO и NO(см. рис.) разбивают квадрат ABCD на четыре равные части (эти части переходят друг в друга при повороте на 90^0).



Поэтому площадь общей части двух квадратов равна четверти площади квадрата ABCD.

Замечание. Ответ не зависит от угла, под которым пересекаются стороны квадратов.

Второй способ.

Можно разрезать фигуру на две части, из которых составляется квадрат.

Оценивание. За верное решение – 7 баллов. Если высказана идея второго решения (но без точных обоснований), –2-3 балла.