Школьный этап олимпиады по математике

Сентябрь 2015 г.

10 класс

1 блок

1. (**10 б.**) Велосипедист ехал из пункта A в пункт B со скоростью 30 км/ч, а обратно — со скоростью 20 км/ч. Какова средняя скорость его движения (в км/ч)?

Ответ: 24.

Решение. Пусть расстояние между пунктами равно s. Найдём среднюю скорость, разделив общий путь на время движения:

$$v = \frac{2s}{\frac{s}{30} + \frac{s}{20}} = 24.$$

2. (**11 б.**) Какой цифрой оканчивается число $13^{2015} \cdot 17^{2016}$?

Ответ: 7.

Решение. Число можно записать в виде $(13 \cdot 17)^{2015} \cdot 17 = 221^{2015} \cdot 17$. В последнем произведении первый множитель оканчивается на 1, а второй на 7. Поэтому последняя цифра произведения — 7.

3. (**12 б.**) Прямые $y = \frac{x}{4} + a$ и $x = \frac{y}{4} + b$ пересекаются в точке $M(1;3)$. Найдите $a + b$.

Ответ: 3.

Решение. Координаты точки M удовлетворяют обоим уравнениям. Поэтому $3 = \frac{1}{4} + a$ и $1 = \frac{3}{4} + b$. Сложим эти равенства: $4 = 1 + a + b$. Отсюда $a + b = 3$.

4. (**13 б.**) В трапеции большее основание имеет длину 20, боковые стороны — 13 и 15, высота — 12. Найдите длину меньшего основания трапеции, если известно, что она (длина) больше 10.

Ответ: 16.

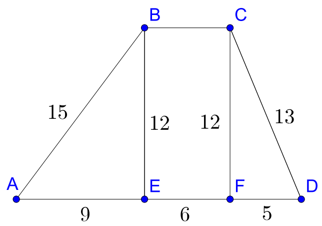

Рис. 1

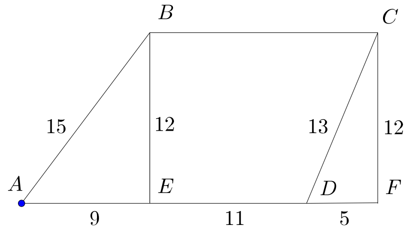

Рис. 2

Решение. Проекции боковых сторон на прямую, содержащую основание трапеции, равны 9 и 5. Если меньшее основание проектируется внутрь большего, то его длина равна $20 - (9 + 5) = 6$ (рис. 1), что противоречит условию. Значит, имеет место случай, изображённый на рис. 2.

5. (13 б.) Дана функция

$$f(x)=\begin{cases} 2x+3, \text{ если } x<3,\\ 3x-3, \text{ если } 3\leqslant x<10,\\ 14-x, \text{ если } x\geqslant 10.\end{cases}$$

Вычислите $\underbrace{f(f(f(f\ldots(f(2)))))}_{2015 \text{ раз}}$.

Ответ: $-2^{2012}-3$.

Решение. Пусть $a_0=2$, $a_{n+1}=f(a_n)$. В задаче требуется вычислить a_{2015}. Имеем $a_1=7$, $a_2=18$, $a_3=-4$, $a_4=-5$, $a_5=-7$, $a_6=-11$, $a_7=-19$, …При $n\geqslant 3$ выполняется соотношение $a_{n+1}=2a_n+3$. Если взять $b_n=a_n+3$, то получится, что $b_{n+1}=2b_n$ (при $n\geqslant 3$). Поэтому $b_{2015}=b_3\cdot 2^{2012}=-2^{2012}$, а $a_{2015}=-2^{2012}-3$.

6. (13 б.) Пусть $x(y+z)=6$; $\quad y(z+x)=10$; $\quad (\sqrt{z})^2(x+y)=12$. Найдите z.

Ответ: 4.

Решение. Заметим, что $(\sqrt{z})^2=z\geqslant 0$. Обозначим $a=yz$, $b=zx$, $c=xy$. Тогда $b+c=6$; $\quad a+c=10$; $\quad a+b=12$. Отсюда $a=8$, $b=4$, $c=2$.

Итак, $yz=8; zx=4; xy=2$. Перемножив эти уравнения, получим $(xyz)^2=64$. Значит, $xyz=\pm 8$ и полученная система имеет два решения $(1;2;4)$ и $(-1;-2;-4)$. Поскольку $z\geqslant 0$, остаётся только первая тройка.

7. (14 б.) Найдите сумму корней уравнения $\frac{2x}{x^2-2x+5}+\frac{3x}{x^2+2x+5}=\frac{7}{8}$.

Ответ: 6.

Решение. Перепишем уравнение в виде $\frac{2}{(x+\frac{5}{x})-2}+\frac{3}{(x+\frac{5}{x})+2}=\frac{7}{8}$. Сделаем замену переменных $t=x+\frac{5}{x}$. Относительно новой переменной имеем уравнение $\frac{2}{t-2}+\frac{3}{t+2}=\frac{7}{8}$, или $7t^2-40t-12=0$. Последнее имеет корни 6 и $-\frac{2}{7}$. Вернёмся к исходной переменной. Уравнение $x+\frac{5}{x}=6$ имеет корни 1 и 5, а уравнение $x+\frac{5}{x}=-\frac{2}{7}$ равносильно $7x^2+2x+35=0$ и корней не имеет.

8. (14 б.) Петя умножил натуральное число $n>1$ на 997. В полученном числе все цифры оказались нечётными. Найдите наименьшее значение n.

Ответ: 335.

Решение. Последняя цифра числа $997n$ нечётна при нечётном n. Далее считаем, что число n нечётно. Если $3n<1000$, из равенства

$$997n=1000(n-1)+(1000-3n)$$

заключаем, что четвёртая справа цифра числа $997n$ совпадает с последней цифрой числа $n-1$ и является чётной. Значит, $3n\geqslant 1000$, откуда (с учётом нечётности n) $n \geqslant 335$. В то же время $997 \cdot 335 = 333995$ — здесь все цифры нечётны.

2 блок

1. (**10 б.**) Первая труба заполняет бассейн за 2 ч, а вторая — за 3 ч. За сколько минут эти две трубы заполнят бассейн, работая одновременно?

Ответ: 72.

Решение. За час первая труба заполняет $1/2$ часть бассейна, а вторая $1/3$ часть. Работая одновременно, трубы за один час заполнят $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ часть бассейна. Значит, бассейн заполнится полностью за $\frac{6}{5}$ ч.

2. (**11 б.**) Какой цифрой оканчивается число $17^{2015} \cdot 19^{2016}$?

Ответ: 3.

Решение. Последняя цифра произведения натуральных чисел определяется их последними цифрами. Последние цифры степеней семёрки таковы: 7, 9, 3, 1, 7, ... Имеем последовательность, элементы которой циклически повторяются с периодом 4. Поэтому 17^{2015} оканчивается на ту же цифру, что и число 7^3, а именно, на 3. Очевидно также, что чётные степени 9 оканчиваются на 1.

3. (**12 б.**) Прямые $y = \frac{x}{6} + a$ и $x = \frac{y}{6} + b$ пересекаются в точке $M(2; 4)$. Найдите $a + b$.

Ответ: 5.

Решение. Координаты точки M удовлетворяют обоим уравнениям. Поэтому $4 = \frac{2}{6} + a$ и $2 = \frac{4}{6} + b$. Сложим эти равенства: $6 = 1 + a + b$. Отсюда $a + b = 5$.

4. (**12 б.**) В трапеции большее основание имеет длину 20, боковые стороны — 13 и 15, высота — 12. Найдите длину меньшего основания трапеции, если известно, что она (длина) больше 10.

Ответ: 16.

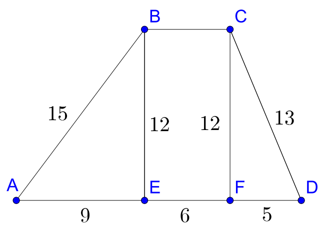

Рис. 1

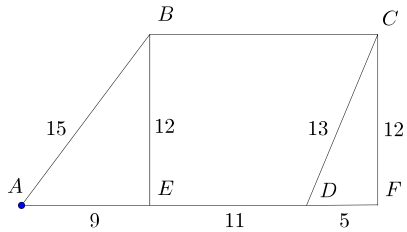

Рис. 2

Решение. Проекции боковых сторон на прямую, содержащую основание трапеции, равны 9 и 5. Если меньшее основание проектируется внутрь большего, то его длина равна $20 - (9 + 5) = 6$ (рис. 1). В противном случае имеет место случай, изображённый на рис. 2, но при этом длина меньшего основания больше 10.

5. (**13 б.**) Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{если } x < 3, \\ 3x-3, & \text{если } 3 \leqslant x < 10, \\ 14-x, & \text{если } x \geqslant 10. \end{cases}$$

Вычислите $\underbrace{f(f(f(f\ldots(f(5)))))}_{2015 \text{ раз}}$.

Ответ: $-2^{2010}-3$.

Решение. Пусть $a_0 = 5$, $a_{n+1} = f(a_n)$. В задаче требуется вычислить a_{2015}. Имеем $a_1 = 12$, $a_2 = 2$, $a_3 = 7$, $a_4 = 18$, $a_5 = -4$, $a_6 = -5$, $a_7 = -7$, $a_8 = -11$, $a_9 = -19$, ... При $n \geqslant 5$ выполняется соотношение $a_{n+1} = 2a_n+3$. Если взять $b_n = a_n + 3$, то получится, что $b_{n+1} = 2b_n$ (при $n \geqslant 5$). Поэтому $b_{2015} = b_5 \cdot 2^{2010} = -2^{2010}$, а $a_{2015} = -2^{2010} - 3$.

6. (**14 б.**) Пусть $x(y+z) = 16$; $y(z+x) = 21$; $(\sqrt{-z})^2(x+y) = -25$. Найдите z.

Ответ: -5.

Решение. Заметим, что $z \leqslant 0$ и $(\sqrt{-z})^2 = -z \geqslant 0$. Обозначим $a = yz$, $b = zx$, $c = xy$. Тогда $b+c = 16$; $a+c = 21$; $a+b = 25$. Отсюда $a = 15$, $b = 10$, $c = 6$.

Итак, $yz = 15; zx = 10; xy = 6$. Перемножив эти уравнения, получим $(xyz)^2 = 900$. Значит, $xyz = \pm 30$ и полученная система имеет два решения $(2;3;5)$ и $(-2;-3;-5)$. Поскольку $z \geqslant 0$, остаётся только вторая тройка.

7. (**14 б.**) Найдите сумму корней уравнения $\frac{4x}{4x^2-8x+7} + \frac{3x}{4x^2-10x+7} = 1$.

Ответ: 4.

Решение. Перепишем уравнение в виде $\frac{4}{(4x+\frac{7}{x})-8} + \frac{3}{(4x+\frac{7}{x})-10} = 1$. Сделаем замену переменных $t = 4x + \frac{7}{x}$. Относительно новой переменной имеем уравнение $\frac{4}{t-8} + \frac{3}{t-10} = 1$, или $t^2 - 25t + 144 = 0$. Последнее имеет корни 16 и 9. Вернёмся к исходной переменной. Уравнение $4x + \frac{7}{x} = 16$ равносильно $4x^2 - 16x + 7 = 0$, сумма его корней равна 4. Уравнение $4x + \frac{7}{x} = 9$ равносильно $4x^2 - 9x + 7 = 0$ и корней не имеет.

8. (**14 б.**) В дате 24.09.15 сумма цифр, которыми записаны день и месяц, равны номеру года. Сколько всего в XXI веке дат с таким свойством?

Ответ: 365.

Решение. Назовём дату, удовлетворяющую условию задачи, *особой*. Она имеет вид $xy.zt.x+y+z+t$. По дню и месяцу год определяется однозначно! Например, 11.04 — особая дата в 6 г., 04.11 тоже в 6 г., 05.11 — в 7 г., 29.09 — в 22 г. Дата 29.02 была бы особой в 13 г., но в 13 г. такой даты нет (этот год не является високосным). Таким образом, в XXI веке ровно 365 особых дат.