Муниципальный этап олимпиады школьников по математике
2019–2020 учебный год

Решения задач. Критерии оценивания

9 класс

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^3 + 2x + y = 0; \\ y^3 + 2y + z = 0; \\ z^3 + 2z + x = 0. \end{cases}$

Ответ: $x = y = z = 0$.

Решение. Очевидно, имеется нулевое решение. Докажем, что других нет.

Если $x > 0$, то из первого уравнения следует, что $y < 0$. Если $y < 0$, то из второго уравнения следует, что $z > 0$. Но при положительных x и z не выполнено третье равенство. Аналогично к противоречию приводит предположение $x < 0$. Значит, $x = 0$. Тогда из первого и второго уравнений следует, что $y = 0$ и $z = 0$. При этом выполнено и третье равенство.

Оценивание. За верное решение 7 б. Если указано нулевое решение, но не доказано, что других нет, 1 б.

2. Число $1/17$ представили в виде бесконечной десятичной дроби. Первую ненулевую цифру после запятой зачеркнули. Представьте получившееся число в виде правильной дроби.

Ответ: $\dfrac{3}{34}$.

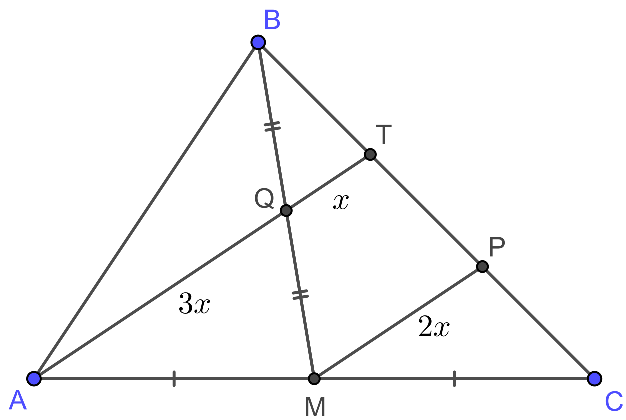
Решение. $1/17 = 0{,}058\ldots$. Вычёркивание пятёрки означает, что мы отняли от исходного числа 0,05, после чего умножили полученное число на 10. Значит, получится число $10\left(\dfrac{1}{17} - \dfrac{1}{20}\right) = \dfrac{3}{34}$.

Оценивание. За верное решение 7 б.

3. В треугольнике ABC точка M — середина стороны AC, а точка Q — середина медианы BM. Прямая, проходящая через точку M параллельно AQ, пересекает сторону BC в точке P. Найдите MP, если $AQ = 30$.

Ответ: 20.

Решение. Пусть T — точка пересечения луча AQ со стороной BC.



Тогда MP — средняя линия в треугольнике ATC и $MP = AT/2$, а QT — средняя линия в треугольнике MBC и $QT = MP/2$. Если $QT = x$, то $MP = 2x$, $AT = 4x$ и $AQ = 3x$. Значит, $x = 10$, $MP = 20$.

Оценивание. За верное решение 7 б.

4. Аня и Боря играют в такую игру. На доске записано число 2. За один ход разрешается к числу прибавлять любой его делитель, меньший самого числа. Выигрывает тот, после хода которого впервые получится число 2019 или больше. Игроки ходят по очереди, а первый ход — за Аней. Сможет ли она победить, как бы искусно ни играл Боря?

Ответ: да.

Решение.

1-й способ. Выигрышная стратегия Ани может быть, например, следующей. К чётному числу, меньшему 1345, Аня прибавляет единицу. Боря будет иметь дело с каким-то нечётным числом n. Если k — наибольший его делитель, отличный от n, то число $\dfrac{n}{k}$ — наименьший делитель числа n, отличный от 1. В силу нечётности n этот делитель не меньше 3, т. е. $\dfrac{n}{k} \geqslant 3$ и $k \leqslant \dfrac{n}{3}$. Значит, после хода Бори получится чётное число, которое не больше $n + \frac{n}{3} = \frac{4}{3}n$ и поэтому меньше $\frac{4}{3} \cdot 1345$, то есть меньше 1793 и тем более 2019. Боря на этом этапе не выигрывает. Число на доске на каждом шаге увеличивается хотя бы на единицу. Поэтому в какой-то момент после хода Бори получится чётное число, большее 1345. Аня прибавляет к этому числу его половину и выигрывает!

2-й способ. После первого хода Ани на доске появится число 3, а после первого хода Бори число 4. Далее у Ани выбор: записать 5 или 6. Если она записывает 5, то после следующего хода Бори на доске число 6. В силу конечности игры кто-то в этой ситуации имеет выигрышную стратегию. Если Аня, то она её применит. Если же Боря, то тогда Ане следовало вместо 5 записывать сразу 6, после чего применять выигрывающую стратегию противника, в роли которого она оказалась.

Замечание. Во втором решении используется идея *передачи хода.* Здесь не указывается выигрышная стратегия, но доказывается, что она есть.

Оценивание. За верное решение 7 б. Если приведена верная стратегия Ани, но не обосновано, что она действительно выигрышная, то 4 б.

5. Сколько способов раскрасить клетки доски 5×6 в чёрный и белый цвета так, чтобы в любом квадрате 2×2 было по две чёрных и по две белых клетки?

Ответ: $2^6 + 2^5 - 2 = 94$.

Решение. Будем красить клетки столбец за столбцом. Рассмотрим два разных случая.

I. В первом столбце цвета клеток чередуются. Если первая клетка второго столбца того же цвета, что и соседняя с ней клетка первого столбца, то вторая клетка второго столбца обязана быть другого цвета, а третья клетка опять первого цвета и т. д. — второй столбец будет раскрашен так же, как и первый. Если же первая клетка второго столбца будет отличаться по цвету от соседней с ней клеткой первого столбца, то аналогично доказывается, что чередование цветов будет и во втором столбце (и получится инверсная раскраска по сравнению с первым столбцом). Другой вариант рассуждений: если во втором столбце есть две соседние клетки одного цвета, то содержащий их квадрат, расположенный в первых двух столбцах, будет состоять из трёх клеток одного цвета и одной клетки другого цвета, что противоречит условию задачи.

Итак, если в первом столбце чередование цветов, то чередоваться цвета будут и во втором столбце. Аналогично: если покрашены первые k столбцов, а в последнем из них цвета чередуются, то и в очередном $(k+1)$-м будет чередование цветов. Значит, во всех столбцах цвета чередуются.

При указанном способе раскраски каждый столбец может быть покрашен одним из двух способов. Поэтому таких раскрасок 2^6.

II. В первом столбце есть две соседние клетки одного цвета. Докажем, что в этом случае раскраска каждого столбца, начиная со второго, инверсна раскраске предыдущего.

Назовём клетку *интересной*, если справа от неё расположена клетка другого цвета. Очевидно, что клетка, соседняя по столбцу с интересной клеткой, также должна быть интересной. Две соседние по столбцу клетки одного цвета, обязаны быть интересными. Но тогда, в силу предыдущего утверждения, весь этот столбец состоит из интересных клеток. Поэтому раскраска следующего столбца будет инверсной по отношению к данному столбцу, но в нём также найдутся две соседние клетки одного цвета. И так далее.

Таким образом, в случае **II** раскраска (не чередующаяся) первого однозначно определяет раскраску всех остальных столцов. Всего способов раскрасить первый столбец 2^5, из них ровно два дают чередующуюся раскраску. Значит, в случае **II** имеем $2^5 - 2$ способов раскраски.

Оценивание. За верное решение 7 б. Если описаны все возможные раскраски и подсчитано их количество, но не доказано, что нет других раскрасок, 4 б.