Школьный этап олимпиады по математике

Сентябрь 2015 г.

9 класс

1 блок

1. (10 б.) Радиус круга увеличился на 10%. На сколько процентов увеличилась его площадь?

Ответ: 21%.

2. (11 б.) Длины катетов прямоугольного треугольника 5 и 12. Чему равен радиус вписанной окружности?

Ответ: 2.

Решение. Для прямоугольного треугольника, длины катетов которого a и b, а длина гипотенузы c, радиус вписанной окружности можно вычислить по формуле $r = \frac{a+b-c}{2}$. Другой способ решения — через формулу площади $S = pr$.

3. (12 б.) В корзине 47 грибов — белых и лисичек. Известно, что среди любых 16 грибов есть хотя бы один белый, а среди любых 33 грибов хотя бы одна лисичка. Сколько белых грибов в корзине?

Ответ: 32.

Решение. Поскольку среди любых 16 грибов есть хотя бы один белый, в корзине нет 16 лисичек, значит, лисичек не более 15, поэтому белых не менее 32. С другой стороны, поскольку среди любых 33 грибов есть хотя бы одна лисичка, в корзине нет 33 белых грибов, значит, белых не более 32. Таким образом, в корзине ровно 32 белых грибов.

4. (13 б.) В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов B и C пересекаются в точке E, лежащей на отрезке AD. Найдите площадь параллелограмма, если $BE = 3$, а $CE = 6$.

Ответ: 18.

Решение. Несложно доказать, что биссектрисы соседних углов параллелограмма пересекаются под прямым углом. Кроме того, $S_{ABCD} = 2S_{BCE}$ (у параллелограмма $ABCD$ и треугольника BCE общие основание и высота). Поэтому $S_{ABCD} = BE \cdot CE$.

5. (13 б.) В купе железнодорожного вагона один напротив другого стоят два дивана, на каждом из которых по четыре места. Из восьми пассажиров двое желают сидеть лицом в направлении движения поезда, двое — спиной, а остальным всё равно как сидеть. Сколькими способами могут разместиться пассажиры, с учётом их пожеланий?

Ответ: 3456

Решение. Те, кто желает смотреть вперёд по направлению движения, выбирают свои места $4 \cdot 3 = 12$ способами. Столько же вариантов размещения у тех. кто хочет смотреть в противоположную сторону. Оставшиеся четверо на оставшихся четырёх местах размещаются $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ способами. Всего, по правилу произведения, имеем $12 \cdot 12 \cdot 24 = 3456$ способов.

6. (**13 б.**) Найдите сумму корней уравнения

$$(x^2 - 3x + 2)^2 - 3(x^2 - 3x + 2) + 2 = x.$$

Ответ: 6.

Решение. Пусть $y = x^2 - 3x + 2$. Относительно x и y имеем систему уравнений

$$y^2 - 3y + 2 = x; \quad x^2 - 3x + 2 = y.$$

Вычтя из первого уравнения второе, получим $y^2 - x^2 = 2(y - x)$, откуда $y = x$ или $y + x = 2$. В первом случае имеем $x^2 - 4x + 2 = 0$, а во втором $x^2 - 3x + 2 = 2 - x$, т. е. $x^2 - 2x = 0$. Сумма всех корней двух уравнений равна 6.

7. (**13 б.**) Найдите все натуральные n, для которых число $5^n + 3^n$ делится на $5^{n-1} + 3^{n-1}$. В ответ запишите их количество.

Ответ: 1.

Решение. Из соотношений

$$3(5^{n-1} + 3^{n-1}) = 3 \cdot 5^{n-1} + 3^n < 5^n + 3^n < 5 \cdot 5^{n-1} + 5 \cdot 3^{n-1} = 5(5^{n-1} + 3^{n-1})$$

следует, что число $\frac{5^n+3^n}{5^{n-1}+3^{n-1}}$ больше 3, но меньше 5. Если оно целое, то оно равно 4. Поэтому $5^n + 3^n = 4(5^{n-1} + 3^{n-1})$, откуда $5^{n-1} = 3^{n-1}$, что возможно только при $n = 1$.

8. (**14 б.**) Числа 2 и 5 возвели в степень 2015, и результаты вычисления записали один за другим. Сколько всего цифр было записано?

Ответ: 2016

Решение. Пусть 5^n и 2^n в своей десятичной записи содержат соответственно $k + 1$ и $l + 1$ цифр. Тогда $5^n = a \cdot 10^k$, где $1 < a < 10$, и $2^n = b \cdot 10^l$, где $1 < b < 10$. Отсюда $10^n = ab \cdot 10^{k+l}$, при этом ab — степень 10, и $1 < ab < 100$. Значит, $ab = 10$ и $n = k + l + 1$. Общее количество цифр в десятичной записи 5^n и 2^n равно $(k + 1) + (l + 1) = n + 1$.

Школьный этап олимпиады по математике

Сентябрь 2015 г.

9 класс

2 блок

1. (10 б.) Радиус круга уменьшился на 10%. На сколько процентов увеличилась его площадь?

Ответ: 19%.

2. (11 б.) Радиусы вписанной и описанной окружностей прямоугольного треугольника равны 2 и 5. Найдите длину большего катета.

Ответ: 8.

Решение. Для прямоугольного треугольника с катетами a и b и гипотенузой c справедливы соотношения $r = \frac{a+b-c}{2}$ и $= 2R$. Исходя из условий данной задачи, получаем $a + b = 14$, $a^2 + b^2 = 100$. Из данной системы получаем, что длины катетов 6 и 8.

3. (12 б.) В корзине 45 грибов — белых и лисичек. Известно, что среди любых 20 грибов есть хотя бы один белый, а среди любых 27 грибов хотя бы одна лисичка. Сколько белых грибов в корзине?

Ответ: 26.

Решение. Поскольку среди любых 20 грибов есть хотя бы один белый, в корзине нет 20 лисичек, значит, лисичек не более 19, поэтому белых не менее 26. С другой стороны, поскольку среди любых 27 грибов есть хотя бы одна лисичка, в корзине нет 27 белых грибов, значит, белых не более 26. Таким образом, в корзине ровно 26 белых грибов.

4. (13 б.) В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов B и C пересекаются в точке E, лежащей на отрезке AD. Найдите площадь параллелограмма, если $BE = 7$, а $CE = 6$.

Ответ: 42.

Решение. Несложно доказать, что биссектрисы соседних углов параллелограмма пересекаются под прямым углом. Кроме того, $S_{ABCD} = 2S_{BCE}$ (у параллелограмма $ABCD$ и треугольника BCE общие основание и высота). Поэтому $S_{ABCD} = BE \cdot CE$.

5. (13 б.) В купе железнодорожного вагона один напротив другого стоят два дивана, на каждом из которых по четыре места. Из восьми пассажиров трое желают сидеть лицом в направлении движения поезда, трое — спиной, а двоим всё равно как сидеть. Сколькими способами могут разместиться пассажиры, с учётом их пожеланий?

Ответ: 1152

Решение. Те, кто желает смотреть вперёд по направлению движения, выбирают свои места $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ способами. Столько же вариантов размещения у тех. кто хочет смотреть в противоположную сторону. Оставшиеся двое на оставшихся двух местах размещаются двумя способами. Всего, по правилу произведения, имеем $24 \cdot 24 \cdot 2 = 1152$ способов.

6. (13 б.) Найдите сумму корней уравнения

$$(x^2 - 4x + 3)^2 - 4(x^2 - 4x + 3) + 3 = x.$$

Ответ: 8

Решение. Пусть $y = x^2 - 4x + 3$. Относительно x и y имеем систему уравнений

$$y^2 - 4y + 3 = x; \quad x^2 - 4x + 3 = y.$$

Вычтя из первого уравнения второе, получим $y^2 - x^2 = 3(y - x)$, откуда $y = x$ или $y + x = 3$. В первом случае имеем $x^2 - 5x + 3 = 0$, а во втором $x^2 - 4x + 3 = 3 - x$, т. е. $x^2 - 3x = 0$. Сумма всех корней двух уравнений равна 8.

7. (13 б.) Найдите все натуральные n, для которых число $6^n + 2^n$ делится на $6^{n-1} + 2^{n-1}$. В ответ запишите их количество.

Ответ: 2.

Решение. Из соотношений

$$2(6^{n-1} + 2^{n-1}) = 2 \cdot 6^{n-1} + 2^n < 6^n + 2^n < 6 \cdot 6^{n-1} + 6 \cdot 2^{n-1} = 6(6^{n-1} + 2^{n-1})$$

следует, что число $\frac{6^n+2^n}{6^{n-1}+2^{n-1}}$ больше 2, но меньше 6. Если оно целое, то оно равно 3, 4 или 5. Тройка отпадает, поскольку $6^n + 2^n$ не делится на 3.

Если $6^n + 2^n = 4(6^{n-1} + 2^{n-1})$, то $6^{n-1} = 2^{n-1}$, откуда $3^{n-1} = 1$ и $n = 1$.

Если $6^n + 2^n = 5(6^{n-1} + 2^{n-1})$, то $6^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1}$, откуда $3^{n-1} = 3$ и $n = 2$.

8. (14 б.) К натуральному числу n приписали справа три цифры и получили число, равное сумме $1 + 2 + \ldots + n$. Найдите наибольшее n с таким свойством.

Ответ: 1999.

Решение. Пусть приписано число k. Тогда $10^3 n + k = \frac{n(n+1)}{2}$. Отсюда $2k = n(n - 1999)$. Поскольку $n > 0$ и $k \geqslant 0$, получаем $n \geqslant 1999$. Но если $n \geqslant 2000$, то $2k \geqslant 2000$ и $k \geqslant 1000$. Остаётся случай $n = 1999$, $k = 0$.