Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников
по математике
2017-2018 учебный год
9 класс
Максимальный балл – 35

1. Пешеходы Петя и Вася одновременно выходят навстречу друг другу из пунктов А и В и встречаются через полчаса. Продолжая движение, Петя прибывает в пункт В на 11 минут раньше, чем Вася в пункт А. За какое время преодолел расстояние АВ каждый пешеход?

Ответ: Петя шел 55 минут, а Вася 66 минут.

Решение. Пусть скорости Пети и Васи x м/мин и y м/мин соответственно, расстояние между А и В равно S м. Тогда

$$S = (x + y) \cdot 30;$$
$$\frac{S}{x} - \frac{S}{y} = 11$$

Пусть Петя шел t минут. Тогда $\frac{s}{x} = t$; $\frac{s}{y} = t + 11$.

$$\frac{1}{30} = \frac{x+y}{S} = \frac{x}{S} + \frac{y}{S} = \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1}$$

Получаем квадратное уравнение относительно t.

$$t^2 - 49t - 330 = 0;$$

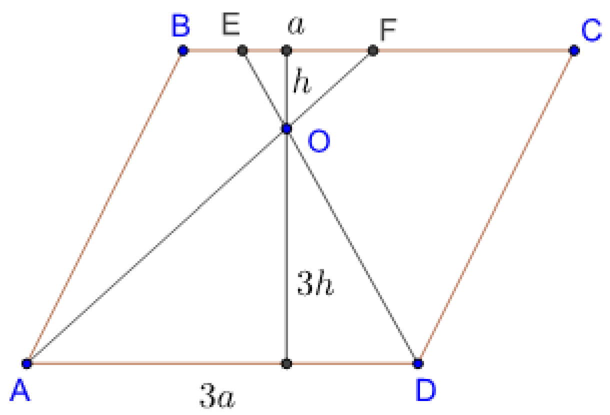
из которого t = 55.

Оценивание. За полное решение 7 б. Если составлена математическая модель (выписаны два уравнения), но решение не доведено до конца – 2 б.

2. На стороне ВС параллелограмма ABCD выбраны точки Е и F. Отрезки AFи DE пересеклись в точке О. Найдите площадь параллелограмма, если площади треугольников AOD и FOE равны соответственно 9 кв. см и 1 кв. см.

Ответ:: 24 кв. см.

Решение. Треугольники ADO и FOE подобны (по трем углам; здесь пары накрест лежащих углов и вертикальные углы).



Отношение их площадей равно квадрату коэффициента подобия. Поэтому, если EF = a, а высота треугольника EOF, проведенная из вершины O равна h, то AB = 3a, а высота трапеции h + 3h = 4h. Поскольку $S_{FOE} = \frac{1}{2}ah = 1$, имеем ah = 2 и

$$S_{ABCD} = 3a \cdot 4h = 12ah = 24.$$

Оценивание. За верное решение – 7 б.

3. Петя записал на доске натуральное число, а Вася стер в нем первые две цифры. В результате число уменьшилось в 165 раз. Каким может быть Петино число, если известно, что оно нечетное?

Ответ: 4125 или 825.

Решение. Петино число представим в виде $10^k a + b$, где $10 \le a \le 99$, $b < 10^k$. По условию, $10^k a + b = 165b$. Отсюда $10^k a = 41 \cdot 4b$.

Поскольку 10^k и 41 взаимно простые числа, число a должно делиться на 41. Из двухзначных чисел таким свойством обладают только 41 и 82. Если $a = 41$, то $10^k = 4b$. Поскольку b нечетно, 10^k делится на 4, но не делится на 8. Стало быть, $k = 2$, $b = 25$, а искомое число 4125.

Если $a = 82$, то $10^k = 2b$. Поскольку b нечетно, 10^k делится на 2, но не делится на 4. Стало быть, $k = 1$, $b = 5$, а искомое число 825.

Оценивание. За полное решение 7 б. Если ответы найдены в результате перебора чисел, кратных 165, но не доказано, что нет других решений, то по 1 б. за каждый верный ответ.

4. Учитель поручил Толе последовательно выписывать числа по такому правилу; вслед за числами a и b нужно записывать число $a - \frac{2}{b}$. Так нужно действовать до тех пор, пока на каком-то шаге не получится число 0. Первые два числа Толя мог выбрать произвольно. Он выбрал числа 14 и 15. Сколько всего чисел придется записать Толе?

Ответ: 107.

Решение. Имеем последовательность

$$x_1 = 14;\ x_2 = 15;\ x_{n+1} = x_{n-1} - \frac{2}{x_n},\ n = 2, 3, \ldots$$

Заметим, что $x_{n+1}x_n = x_n x_{n-1} - 2$. Пусть $y_n = x_n x_{n-1}$. Тогда

$$y_2 = 14 \cdot 15 = 210;\ y_{n+1} = y_n - 2.$$

Отсюда $y_{107} = 0$ и $y_k > 0$ при $k < 107$. Это означает, что $x_{107} = 0$ и $x_k \ne 0$ при $k < 107$.

Оценивание. За верное решение 7 б.

5. Сколько способов выбрать такие три числа из чисел 1, 2, …2017 так, что одно из них является полусуммой двух других?

Ответ : $C_{1009}^2 + C_{1008}^2 = 1\,020\,064$

Решение

Большее и меньшее из трех чисел должны быть одинаковой четности, а среднее по ним определяется однозначно. В нашем распоряжении 1008 четных чисел и 1009 нечетных. Два четных числа можно выбрать $\frac{1008 \cdot 1007}{2}$ способами, а два нечетных – $\frac{1009 \cdot 1008}{2}$ способами

Оценивание. За верное решение 7 б.