Школьный этап олимпиады по математике

Октябрь 2019 г.

9 класс

1 блок

1. В треугольнике ABC проведена биссектриса AP. На стороне AB выбрана такая точка F, что $CF \perp AP$. Найдите AC, если $AB = 3000$ и $AF : FB = 119 : 256$.

Ответ: 952.

Решение. В треугольнике AFC биссектриса, проведённая из вершины A, является и высотой. Поэтому этот треугольник равнобедренный:

$$AC = AF = \frac{119}{119 + 256} \cdot 3000 = 119 \cdot 8 = 952.$$

2. Сколько трёхзначных чисел, в записи которых хотя бы одна цифра нуль?

Ответ: 171.

Решение. Всего трёхзначных чисел 900, из них без нуля $9^3 = 729$.

3. При каком наименьшем n число $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ делится на 2019?

Ответ: 673.

Решение. Ответ вытекает из разложения на простые множители

$$2019 = 3 \cdot 673.$$

4. Сколько решений имеет система уравнений $\left\{ \begin{array}{rcl} x^2 + y & = & 7; \\ x + y^2 & = & 7 \end{array} \right.$?

Ответ: 4.

Решение. Параболы $y = 7 - x^2$ и $x = 7 - y^2$ пересекаются в четырёх точках.

5. Два велосипедиста движутся каждый по своей круговой трассе с постоянными скоростями. Известно, что радиус трассы первого велосипедиста в 4 раза больше радиуса трассы второго. При этом первый велосипедист за 15 минут проезжает на 2 километра больше второго, но совершает в 3 раза меньше оборотов. Найдите скорость первого велосипедиста.

Ответ: 32.

Решение. Пусть скорость первого велосипедиста x км/ч, а второго y км/ч. Пусть радиус второй трассы R км, тогда радиус первой $4R$ км. За час первый велосипедист проедет на 8 км больше, чем второй, а оборотов совершит в 3 раза меньше. Поэтому $x = y + 8$ и

$$\frac{x}{2\pi \cdot 4R} = \frac{1}{3} \cdot \frac{y}{2\pi R}.$$

Отсюда
$$\frac{x}{4}=\frac{y}{3},\quad \frac{y+8}{4}=\frac{y}{3},\quad y=24,\quad x=32.$$

6. Найдите наименьший корень уравнения $|x^2-15x+56|=15x-x^2-56$.

Ответ: 7.

Решение. $|a|=-a \iff a\leqslant 0$. Поэтому исходное уравнение равносильно неравенству $x^2-15x+56\leqslant 0$, множество решений которого отрезок $[7;8]$.

7. В спортшколе 250 учащихся. Каждый из них занимается ровно одним из трёх видов спорта: футболом, баскетболом или волейболом. При этом каждый из учеников рыцарь (всегда говорит правду) или лжец (всегда лжёт). Они заполнили анкету, состоявшую из трёх вопросов: «Ты — футболист?», «Ты — баскетболист?», «Ты — волейболист?». На первый вопрос было 140 утвердительных ответов, на второй 120, на третий 110. Сколько лжецов в спортшколе?

Ответ: 120.

Решение. Рыцарь даёт один утвердительный ответ, а лжец два таких ответа. Поэтому превышение общего числа ответов «да» над числом опрашиваемых и есть число лжецов.

8. На плоскости задан правильный 60-угольник. Сколько ещё можно указать правильных многоугольников, выбирая вершины из числа вершин заданного многоугольника?

Ответ: 77.

Решение. Правильный k-угольник получится, только если k — делитель 60, больший двух. Разных правильный k-угольников ровно $\frac{60}{k}$ штук. Поэтому новых правильных многоугольников можно указать столько:
$$\frac{60}{3}+\frac{60}{4}+\frac{60}{5}+\frac{60}{6}+\frac{60}{10}+\frac{60}{12}+\frac{60}{15}+\frac{60}{20}+\frac{60}{30}=77.$$

2 блок

1. В треугольнике ABC проведена биссектриса AP. На стороне AB выбрана такая точка F, что $CF \perp AP$. Найдите AC, если $AB = 1200$ и $AF : FB = 123 : 277$.

Ответ: 369.

Решение. В треугольнике AFC биссектриса, проведённая из вершины A, является и высотой. Поэтому этот треугольник равнобедренный:

$$AC = AF = \frac{123}{123 + 277} \cdot 1200 = 123 \cdot 3 = 369.$$

2. Сколько пятизначных чисел, в записи которых хотя бы одна цифра единица?

Ответ: 37512.

Решение. Всего пятизначных чисел 90000, из них без единицы $8 \cdot 9^4 = 52488$.

3. При каком наименьшем n число $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ делится на 2018?

Ответ: 1009.

Решение. Ответ вытекает из разложения на простые множители

$$2018 = 2 \cdot 1009.$$

4. Сколько решений имеет система уравнений $\left\{\begin{array}{rcl} 2x + 3y & = & 5xy; \\ 9x - 2y & = & 7xy \end{array}\right.$?

Ответ: 2.

Решение. Первое уравнение умножим на 7, а второе на 5. Правые части новых уравнений совпадут. Из равенства левых частей получим $14x + 21y = 45x - 10y$, откуда $x = y$. Далее легко получить, что у системы ровно два решения: $(0, 0)$ и $(1, 1)$.

5. Два велосипедиста движутся каждый по своей круговой трассе с постоянными скоростями. Известно, что радиус трассы первого велосипедиста в 4 раза больше радиуса трассы второго. При этом первый велосипедист за 15 минут проезжает на 2 километра больше второго, но совершает в 3 раза меньше оборотов. Найдите скорость второго велосипедиста.

Ответ: 24.

Решение. Пусть скорость первого велосипедиста x км/ч, а второго y км/ч. Пусть радиус второй трассы R км, тогда радиус первой $4R$ км. За час первый велосипедист проедет на 8 км больше, чем второй, а оборотов совершит в 3 раза меньше. Поэтому $x = y + 8$ и

$$\frac{x}{2\pi \cdot 4R} = \frac{1}{3} \cdot \frac{y}{2\pi R}.$$

Отсюда

$$\frac{x}{4}=\frac{y}{3}, \quad \frac{y+8}{4}=\frac{y}{3}, \quad y=24, \quad x=32.$$

6. Найдите наибольший корень уравнения $|2x^2+3x-5|=5-3x-2x^2$.

Ответ: 1.

Решение. $|a|=-a \iff a\leqslant 0$. Поэтому исходное уравнение равносильно неравенству $2x^2+3x-5\leqslant 0$, множество решений которого отрезок $[-\frac{5}{2};1]$.

7. В спортшколе 200 учащихся. Каждый из них занимается ровно одним из трёх видов спорта: футболом, баскетболом или волейболом. При этом каждый из учеников рыцарь (всегда говорит правду) или лжец (всегда лжёт). Они заполнили анкету, состоявшую из трёх вопросов: «Ты — футболист?», «Ты — баскетболист?», «Ты — волейболист?». На первый вопрос было 100 утвердительных ответов, на второй 110, на третий 120. Сколько рыцарей в спортшколе?

Ответ: 70.

Решение. Рыцарь даёт один утвердительный ответ, а лжец два таких ответа. Поэтому превышение общего числа ответов «да» над числом опрашиваемых и есть число лжецов. В нашем случае оно равно

$$(100+110+120)-200=130.$$

8. На плоскости задан правильный 100-угольник. Сколько ещё можно указать правильных многоугольников, выбирая вершины из числа вершин заданного многоугольника?

Ответ: 66.

Решение. Правильный k-угольник получится, только если k — делитель 100, больший двух. Разных правильный k-угольников ровно $\frac{100}{k}$ штук. Поэтому новых правильных многоугольников можно указать столько:

$$\frac{100}{4}+\frac{100}{5}+\frac{100}{10}+\frac{100}{20}+\frac{100}{25}+\frac{100}{50}=66.$$