Муниципальный этап областной олимпиады школьников

по математике

2018-2019 учебный год

10 класс

Решения задач и критерии оценивания

1. Шестьдесят шесть учеников сдавали ЕГЭ по математике. Известно, что каждый получил одну из оценок: «3», «4» или «5». Если сложить все полученные оценки, то получится число 270. Определите каких оценок было поставлено больше: троек или пятерок и на сколько?

Ответ: пятерок больше на 6.

Решение: По условию, x+y+z=66, 3x+4y+5z=270. Умножая первое уравнение на 4, после вычитания из второго получим z-x=6, что и означает: пятерок на 6 больше.

Замечание. Вполне допустимы и решения, основанные на «переделывании» одних оценок в другие.

Оценивание: полное решение – 7 баллов. За «пятерок больше» - 1 балл.

2. Сумма 2018 целых чисел делится на 6. Докажите, что сумма кубов этих чисел также делится на 6.

Решение. Вычтем из суммы кубов чисел сумму этих чисел. Полученная разность распадается на слагаемые вида n^3- $n = n(n-1)(n+1)$. Но произведение трех идущих подряд натуральных чисел делится на 6 (поскольку среди этих трех чисел есть число, кратное 3, и есть число, кратное 2). Поэтому полученная разность делится на 6. Но тогда и сумма кубов делится на 6.

Замечание. Делимость разности $n^3 - n$ на 6 может быть получена и рассмотрением остатков от деления на 2 и 3.

Оценивание. Полное решение – 7 баллов. Доказана только делимость суммы кубов на 2 – 2 балла (на 3 – 3 балла)

3. Директор школы ведет колонну старшеклассников длиной 18 метров на экзамен по ЕГЭ. Пересчитывая школьников, директор прошелся из конца колонны в начало, а затем вернулся в конец колонны; колонна продвинулась за это время на 80 метров. Какой путь прошагал директор за это время? (Скорости директора и колонны считать постоянными).

Ответ: 100 метров.

Решение. Пусть скорость директора равна $v,$ а скорость колонны – $u = kv$. Времени всего прошло $\frac{18}{v-u} + \frac{18}{v+u} = \frac{36v}{v^2-u^2}$.За это время колонна передвинулась на $80 = \frac{36uv}{v^2-u^2} = \frac{36k}{1-k^2}$. Решая полученное уравнение, находим $k = \frac{4}{5}$. Значит, директор за то же время прошел путь, в $\frac{5}{4}$ раз больший пути, пройденного колонной, т.е., 100 метров.

Оценивание. Полное решение – 7 баллов. За правильно составленную (но не решенную) систему – 1 балл.

4. На уроке физкультуры 20 мальчиков и 15 девочек встали в круг. По команде физрука «Смирно!» каждый из мальчиков дал каждому из соседних с ним мальчиков дружеский пинок (девочек мальчики не пинают: джентльмены, однако!), а каждая из девочек дружески ущипнула каждую из соседних с ней девочек (мальчиков девочки не щиплют: джентльмены, однако…). Оказалось, что пинков было 16. Сколько могло быть щипков?

Ответ: 6.

Решение. Пусть физрук выгнал одного из хулиганов. Мальчиков стало на одного меньше, и теперь, после смыкания рядов и команды «Смирно!», пинков станет на 2 меньше (перебор вариантов). Повторяя процедуру, физрук добился того, что пинки прекратились (мальчиков при этом стало на 16:2=8 меньше, т.е., осталось 12), и занялся девочками. Когда безобразие в спортзале совсем прекратилось, мальчики и девочки, понятно, стояли чередуясь. Значит, девочек осталось столько же, сколько и мальчиков (т.е., 12). Значит, было выгнано 3 хулиганки, так что щипков было в 2 раза больше, т.е., 6.

Оценивание. Полное решение – 7 баллов. За правильный ответ с примерами расстановки – 1 балл.

5. В Бучялинской бугернии главный город – Бучялинск – расположен в центре правильного шестиугольника (со стороной 100 км), образованного ее остальными 6 городами. Бугернатор бугернии хочет построить сеть дорог, соединяющих все города бугернии. Сможет ли он это сделать, если средств в бугернии хватает на постройку а) 590 км б) 580 км в) 520 км дорог?

Ответ: а) да б) да в) да.

Решение. Для а) достаточно привести сеть, состоящую из пяти сторон шестиугольника и перпендикуляра из центра к одной из них: это дает общую длину $100(5+\frac{\sqrt{3}}{2})$, что меньше 590. Для б) годится такая модификация предыдущего: надо (в соответствующем треугольнике) перпендикуляр и его основание заменить на отрезки, соединяющие вершины треугольника с его центром: это дает общую длину $100(4+\sqrt{3})$, что меньше 580. Наконец, для в) надо такую конструкцию использовать трижды. Именно: разобьем шестиугольник на 6 правильных треугольников; выберем три из них, не имеющих общих сторон; в каждом треугольнике соединим его центр со всеми тремя вершинами. Это дает общую длину $100 \cdot 3\sqrt{3} = 10 \cdot \sqrt{2700} < 10 \cdot \sqrt{2704} = 520$.

Замечание. Для а) и б) возможны и другие конструкции.

Оценивание. а)1 балл б) 2 балла в) 3 балла (баллы, конечно, суммируются).

Максимальная оценка за каждую задачу – 7 баллов.