

ИМ по математике. Заключительный тур. 5 класс

1. По кругу расположили несколько различных натуральных двузначных числа так, чтобы среди любых двух соседних чисел одно делилось на другое. Могло ли оказаться так, что расставлено а) ровно 5 б) ровно 6 чисел?

Ответ: да, в обоих пунктах

Решение:

пример на 5 чисел 10, 20, 60, 30, 90 (числа по кругу, 90 делится на 10)

пример на 6 чисел 10, 90, 30, 60, 20, 40 (числа по кругу, 40 делится на 10)

Критерии:

полное решение – 7 баллов

любой верный пример на пункт а) - 3 балла, на пункт б) - 4 балла. Баллы суммируются. За отсутствие описания процесса получения расстановок баллы не снижать.

2. Дорога из города А в город Б длиной 240 км имеет три равных участка. Максимальная разрешенная скорость на первом участке, считая от А, 60 км/ч, на втором участке 90 км/ч, а на третьем 110 км/ч. Из этих городов одновременно, навстречу друг другу выехали два автомобиля. На первом и втором участках они двигались с максимальной разрешенной скоростью, а на третьем была такая хорошая дорога, что на нем все автомобили превышали допустимую скорость на 10 км/ч. На каком расстоянии от города А встретились автомобили?

Ответ: на расстоянии 90 км от пункта А

Решение:

У нас 3 равных участка, каждый длиной 80 км. Давайте разобьём движение на «куски». Автомобиль, выехавший из Б (второй) пройдёт свой первый участок со скоростью 120 км/ч за $80/120=2/3$ часа. За это время автомобиль, выехавший из А (первый) проедет $60 \cdot 2/3=40$ км, а оставшиеся 40 км еще за $2/3$ часа. К этому времени второй проедет по второму участку $2/3 \cdot 90=60$ км, а между ними останется $80-60=20$ км второго участка. Встретятся они в середине этих 20 км, так как скорости на этот раз будут одинаковы. Итого от пункта А $80+10=90$ км.

Критерии:

полное решение – 7 баллов

посчитано время прохождения первого участка первым автомобилем – 1 балл

посчитано время прохождения третьего участка вторым автомобилем – 1 балл

арифметическая ошибка минус 1 балл

3. Петя нарисовал квадрат 10 на 10 см. За один ход он может сделать горизонтальный или вертикальный разрез любого из имеющихся к тому моменту прямоугольников. То есть первым ходом он разрезает квадрат, затем любой (только один) из получившихся прямоугольников и так далее. Петя сделал 5 ходов. Могло ли оказаться, что какой бы шестой ход не сделал Петя, сумма периметров всех полученных прямоугольников будет больше 143 см?

Ответ: могло

Решение:

Пусть Петя первыми пятью ходами разобьёт квадрат на 6 равных прямоугольников (шириной $10/6=5/3$ и длиной 10) вертикальными разрезами. Периметр изначального квадрата 40 см. Заметим, что каждый разрез прибавляет к сумме периметров удвоенную длину разреза. Посчитаем сумму периметров всех прямоугольников после пяти ходов. Она равна $6 \cdot (2 \cdot (10+5/3))=140$ см. Теперь есть всего два вида шестого хода. Первый – вертикальный разрез, он прибавит к сумме периметров $10+10=20$ см. Второй - горизонтальный разрез одного из равных прямоугольников, он прибавит к

сумме периметров $5/3 \cdot 2 = 10/3 > 3$ см. Итак, в любом случае сумма периметров всех прямоугольников будет больше $140 + 3 = 143$ см.

Критерии:

полное решение – 7 баллов

осознание факта (возможно без обоснования), что любой разрез прибавляет к сумме периметров свою удвоенную длину - 2 балла

4. На экране компьютера было записано число 123456789. Вася так вставил пробелы между некоторыми цифрами этого числа, что оно разбилось на несколько кусков, причем числа, записанные на любых двух кусках, оказались взаимно простыми. Какое наибольшее количество кусков могло получиться? (Напомним, что взаимно простыми называются натуральные числа, у которых есть ровно один общий делитель - единица).

Ответ: 6

Решение:

оценка: заметим, что из четырех цифр 2, 4, 6 и 8 целый кусок может составить не более чем одна. Остальные три обязаны войти в куски, состоящие из двух или более цифр (причем войти не в качестве последней цифры). Это значит, что кусков не может быть больше шести (три куска по две цифры и три куска по одной цифре).

пример: 1 23 4 5 67 89

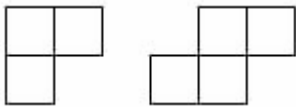
Критерии:

полное решение – 7 баллов

оценка – 3 балла

пример – 3 балла

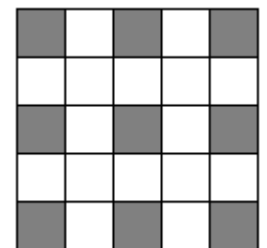
5. Можно ли доску 5×5 замостить без наложений фигурками "уголок" и "зигзаг"? Фигурки можно поворачивать и переворачивать.



Ответ: нельзя.

Решение:

Посмотрим на 9 закрашенных клеток: если фигурка «уголок» или «зигзаг» покрывает закрашенную клетку, то она не может покрыть никакую другую закрашенную клетку. Поскольку все закрашенные клетки должны быть покрыты, то нам понадобится хотя бы 9 фигурок «уголок» или «зигзаг». Но они покроют хотя бы $3 \cdot 9 = 27$ клеток, а в квадрате 5×5 всего 25 клеток, значит замостить без наложений фигурками «уголок» и «зигзаг» квадрат 5×5 не получится.



Критерии: полное решение – 7 баллов