Открытая областная олимпиада по математике

Очный тур 30 ноября 2008 г.

Решения задач

11 класс

1. Найдите множество значений функции $y = \sin^3 x + \sin 3x$.
Ответ: $E(y) = \left[-\frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$.
Решение. С помощью формулы синуса тройного угла

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

перепишем функцию в виде

$$y = 3\sin x - 3\sin^3 x.$$

Сделаем замену переменной $t = \sin x$. Теперь задача сводится к нахождению множества значений функции $f(t) = 3(t - t^3)$ на отрезке $[-1; 1]$. Приравняв производную к нулю, найдём стационарные точки функции $t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Сравнив значения функции в стационарных точках и на концах отрезка, определим наибольшее и наименьшее значения функции. Так как функция $f(t)$ непрерывна, множество её значений на отрезке $[-1; 1]$ представляет собой отрезок от наименьшего значения до наибольшего.

2. Существуют ли такие натуральные числа x, y, z и t такие, что

$$x \cdot 3^x + y \cdot 3^y + z \cdot 3^z = t \cdot 3^t?$$

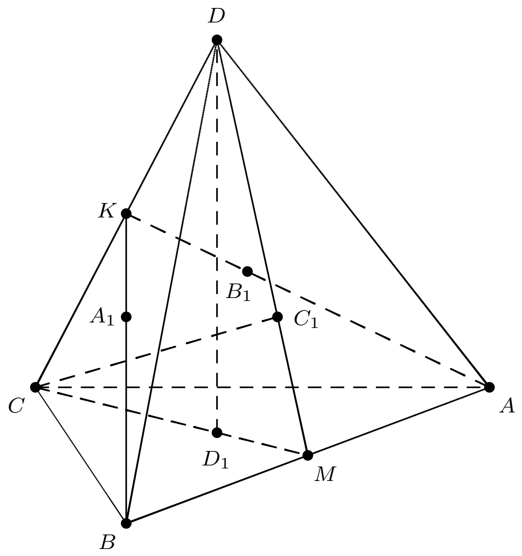
Ответ: нет, не существуют.
Решение. Из уравнения вытекает, что $t > x$. Поскольку t и x натуральные числа, справедливо неравенство $t - 1 \geqslant x$. Точно так же получаем, что $t - 1 \geqslant y$ и $t - 1 \geqslant z$. Но тогда

$$t \cdot 3^t > (t-1) \cdot 3^t = 3(t-1) \cdot 3^{t-1} \geqslant x \cdot 3^x + y \cdot 3^y + z \cdot 3^z.$$

Правая часть уравнения оказалась больше левой.

3. Пусть $ABCD$ — треугольная пирамида, A_1, B_1, C_1, D_1 — центры окружностей, вписанных соответственно в грани BCD, ACD, ABD, ABC. Докажите, что если отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются, то пересекаются и отрезки CC_1 и DD_1.

Доказательство. Если пересекаются отрезки AA_1 и BB_1, то в одной плоскости лежат и прямые BA_1 и AB_1. Эти прямые не могут быть параллельными (иначе грани BCD и ACD параллельны ввиду того, что пересекающиеся прямые BA_1 и CD, лежащие в одной плоскости, соответственно параллельны пересекающимся прямым AB_1 и CD, лежащим в другой плоскости). Значит, прямые BA_1 и AB_1 пересекаются в некоторой точке K. Эта точка принадлежит ребру CD, ибо CD — линия пересечения граней, в которых лежат прямые BA_1 и AB_1.



Центр вписанной окружности является точкой пересечения биссектрис. Поэтому BK — биссектриса треугольника CBD, а AK — биссектриса треугольника CAD. По теореме о биссектрисе

$$\frac{BC}{BD} = \frac{CK}{DK} = \frac{AC}{AD}.$$

Но тогда $\dfrac{CB}{CA} = \dfrac{DB}{DA}$. Получилось, что биссектрисы треугольников BCA и BDA делят в одинаковом отношении отрезок BA. Значит, они имеют общую точку M на этом отрезке.

В треугольнике CMD точка D_1 лежит на стороне CM, а точка C_1 — на стороне DM. Поэтому отрезки CC_1 и DD_1 пересекаются, что и требовалось доказать.

4. На плоскости отмечены 6 точек. Через каждые две из этих точек проведена прямая. Докажите, что данные прямые делят плоскость не более чем на а) 121; б) 100 частей.

Решение. Решим задачу для общего случая, когда на плоскости отмечено n точек. Будем называть эти точки красными.

Всего имеется $N = \dfrac{n(n-1)}{2}$ пар красных точек. Столько будет и прямых.

а) **Грубая оценка.**

Будем последовательно проводить прямые. Если прямая l пересекается с ранее проведёнными в $k-1$ точках, то эти точки делят прямую на k частей (лучи и отрезки), каждая из которых, в свою очередь, делит одну «старую» часть разбиения плоскости на две «новые». Поэтому после проведения прямой l количество частей увеличивается на k.

Поскольку i-я (по порядку проведения) прямая пересекается с предыдущими (а их ровно $i-1$) не более чем в $i-1$ точках, то общее количество частей разбиения не превосходит числа

$$x_n = 1 + 1 + 2 + \ldots + N = 1 + \frac{1+N}{2} \cdot N.$$

При $n = 6$ имеем $N = 15$ и $x_6 = 121$.

б) **Точная оценка.**

Пусть k_i — число точек пересечения i-й прямой с ранее проведёнными прямыми. Как уже отмечалось, после проведения i-й прямой количество частей разбиения увеличивается на $k_i + 1$. Поскольку изначально имелась одна часть, после проведения всех N прямых количество частей равно

$$y_n = 1 + \sum_{i=1}^{N}(k_i + 1) = 1 + N + \sum_{i=1}^{N} k_i. \tag{1}$$

Будем называть точки пересечения прямых, отличные от красных, синими. Количество частей будет максимально, если любые две прямые пересекаются, и через каждую красную точку проходит ровно $n-1$ прямых, а через каждую синюю — две прямые. Найдём, каким будет при этом количество синих точек (обозначим эту величину через z).

Всего пар прямых $\frac{N(N-1)}{2}$. На каждую красную точку приходится $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ пар пересекающихся прямых, а на каждую синюю точку — одна пара. Поэтому $\dfrac{N(N-1)}{2} = n \cdot \dfrac{(n-1)(n-2)}{2} + z$, откуда $z = \dfrac{N(N-1)}{2} - n \cdot \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Теперь заметим, что в сумме $\sum\limits_{i=1}^{N} k_i$ каждая синяя точка учитывается один раз, а каждая красная $n-2$ раза (после того, как первый раз проведена прямая AB через красную точку A, где B — другая красная точка, через точку A пройдут ещё $n-2$ прямых, соединяющих A с остальными красными точками). Поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} k_i = z + n(n-2) = \frac{N(N-1)}{2} - n \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2} + n(n-2). \tag{2}$$

Подставив (2) в (1) и вместо N его выражение через n, после несложных преобразований получим окончательный ответ:

$$y_n = \frac{n-1}{8} \cdot (n^3 - 5n^2 + 18n - 8).$$

При $n = 6$ имеем $y_6 = 85$.

Итак, прямые соединяющие попарно 6 точек, делят плоскость не более чем на 85 частей.