Муниципальный этап областной олимпиады школьников по математике
2019–2020 учебный год
Решения задач. Критерии оценивания

5 класс

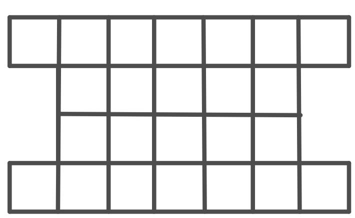
1. Собираясь в школу, Максим нашёл под подушкой, под диваном, на столе и под столом все необходимое: тетрадь, телефон, рюкзак и кроссовки. Под столом он не нашёл ни тетради, ни рюкзака. Телефон никогда не валяется на полу. Рюкзак не был ни на столе, ни под диваном. Где что лежало, если в каждом месте находился только один предмет?

Ответ: кроссовки — под столом, рюкзак — под подушкой, тетрадь — под диваном, телефон — на столе.

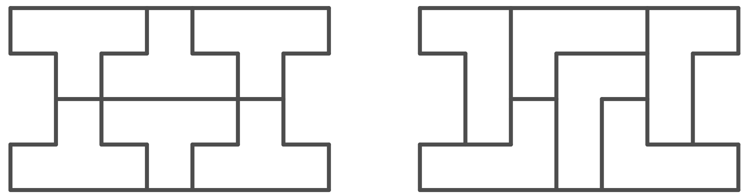
Решение. Задачу удобно решать, составив таблицу, в которой строки отвечают предметам, а столбцы местам. Из условий находим сразу, что под столом находятся кроссовки, а под подушкой — рюкзак . Тогда под диваном остается место только для тетради, так что телефон — на столе.

Оценивание. За полное решение — 7 баллов. За правильный ответ без обоснования — 1 балл. Если для правильного ответа проводится проверка на непротиворечивость с условиями (но не показано, что ответ — единственный) — 3 балла.

2. Разделите фигуру, изображённую на рисунке, на 6 равных клетчатых фигур.



Решение. Вот два возможных решения



Оценивание. За верное решение — 7 баллов.

3. По школьным нормам списочный состав обучающихся в каждом классе должен содержать не менее 12 и не более 25 человек. В один из дней количество отсутствующих на занятиях некоторого класса составило $\frac{1}{8}$-ю часть от количества присутствующих. Сколько всего учеников в этом классе?

Ответ: 18.

Решение. Пусть отсутствовало x учеников. Тогда присутствовало $8x$ учеников, а всего в классе $9x$ учеников. По условию, $12 \leqslant 9x \leqslant 25$. В натуральных числах единственное решение $x = 2$.

Оценивание. За верное решение — 7 баллов. Если ответ получен, но не показано, что нет других решений, 3 б.

4. В крупном шахматном интернет-турнире у каждого игрока было среди участников по три друга. Каждый провёл по одной партии со всеми участниками турнира, кроме трёх друзей. Могло ли быть проведено ровно 2020 партий?

Ответ: нет.

Решение. Если в турнире участвовало n игроков, то общее количество партий в турнире $\frac{n(n-4)}{2}$. Действительно, каждый игрок проводит по $n-4$ партии. В произведении $n(n-4)$ каждая партия учитывается два раза, поэтому общее их количество вдвое меньше.

Нужно выяснить, может ли при каком-то натуральном n быть выполнено равенство $\frac{n(n-4)}{2} = 2020$, или $n(n-4) = 4040$.

Пусть такое число n нашлось. Заметим, что число 4040 делится на 8, но не делится на 16. Один из множителей в левой части должен делиться на 4 (иначе $n(n-4)$ не будет делиться на 8), но тогда и другой делится на 4, а их произведение на 16. Противоречие!

Замечание. Есть много других решений этой задачи.

Оценивание. За верное решение 7 б.

5. В танцевальном анасамбле «Раздолье» 10 мальчиков и 20 девочек. Некоторые из них образуют танцевальные пары. Известно, что в каждой паре хотя бы один из партнёров не входит ни в какую другую пару. Каково может быть максимальное количество танцевальных пар в этом ансамбле?

Ответ: 28.

Решение. Пример. Пусть Максим и Яна самые искусные танцоры ансамбля. Если Максим танцует со всеми девочками, кроме Яны, а Яна со всеми мальчиками, кроме Максима, то условие задачи выполняется, а количество пар $19 + 9 = 28$.

Оценка. Назовём пару, в которой партнёр не входит в другие пары, *мужской*, а пару, в которой партнёрша не входит в другие пары, *женской*. (Пара может быть одновременно и мужской, и женской). Если есть 10 мужских пар, то нет никаких других пар. Значит, если мы хотим, чтобы общее количество пар было более 10, то мужских пар должно быть не более 9. Если есть 20 женских пар, то также нет никаких других пар. И если мы хотим, чтобы общее количество пар было более 20, то женских пар должно быть не более 19. Получается, что количество пар (по условию, каждая из них мужская или женская) не больше $9 + 19 = 28$.

Оценивание. За верное решение 7 б. Если есть только пример или только оценка, 3 б.