Задания для 8 класса

Вариант 1.

1. Одну из сторон прямоугольника уменьшили на 20%, а другую уменьшили на 40%. Оказалось, что периметр при этом уменьшился на 25%. Во сколько раз длина прямоугольника больше его ширины?
   Ответ: 3
   Решение. Если стороны прямоугольника aи b, то старый периметр был $2(a+b)$, а новый $2(0.8a+0.6b)$.Таким образом,$2(0.8a+0.6b)=0.75\cdot 2(a+b)$. Откуда $a=3b$.

2. В кульке лежат 25конфет –ириски и барбариски. Известно, что среди любых 10конфет имеется хотя бы однаириска, а среди любых 17конфет - хотя бы однабарбариска. Сколько всего ирисок в кульке?
   Ответ: 16
   Решение. Т.к. из любых 10 конфет - одна ириска, то барбарисок не больше 9. Аналогично, ирисок не больше 16. Но конфет всего 25=16+9, поэтому барбарисок точно 9, а ирисок точно 16.

3. Сколько корней у уравнения $\Big|\big||x|-1\big|-2\Big|=3$?
   Ответ: 2
   Решение. Последовательное раскрытие двух внешних модулей даёт два возможных варианта подмодульного выражения, но один из вариантов приводит к отрицательному значению модуля числа, и его нужно отбросить. Поэтому в итоге получится 2 варианта для значения x, а именно ± 6.

4. Сколько восьмизначных чисел, запись которых содержит 4 единицы и 4 нуля, делятся на 11?
   Ответ: 18
   Решение. Из признака делимости на 11 получаем, что на четных местах должны стоять 2 единицы и на нечетных местах тоже 2 единицы. Всего есть 6 вариантов размещения двух единиц на четырех четных местах. Т.к. на первом месте должна стоять единица (число восьмизначное), то вариантов размещения на нечетных местах двух единиц всего 3. Итого $3\times 6=18$вариантов.

5. Известно, что $\frac{x}{y}=3$. Найдите $\frac{2x^2-4xy}{5y^2-xy}$.
   Ответ: 3
   Решение. После деления числителя и знаменателя на y^2получаем дробь $\frac{2\cdot 3^2-4\cdot 3}{5-3}=3$.

6. Незнайке было скучно на уроке, и он отметил на прямой несколько точек.Затем между каждыми двумя соседними точками Незнайка отметил ещё по точке. С отмеченными точками он повторил свои действия еще дважды (всего 3 раза). В итоге на прямой получилось241отмеченных точек. Сколько точек было нарисовано Незнайкой изначально?
   Ответ: 31
   Решение. Если напрямой отмечено xточек, то Незнайка дорисовывает еще $x-1$точку. Поэтому точек становится $2x-1$. После второго «захода» их станет $2(2x-1)-1=4x-3$,и после третьего $2(4x-3)-1=8x-7$. Значит $241=8x-7$.

7. Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 2 даёт остаток 1, на 3 даёт остаток 2, на 4 даёт остаток 3, на 5 даёт остаток 4, на 6 даёт остаток 5 и делится на 7.
   Ответ: 119
   Решение. Если A – искомое число, то $A+1$делится на 2, 3, 4, 5, 6, поэтому делится на наименьшее кратное этих чисел, т.е. 60. Если $A+1=60$, то A не делится на 7.А вот вариант $A+1=120$подходит.

8. Числа a, bи c – попарно различные ненулевые цифры.Пусть $\frac{m}{n}$ – наибольшее значение, которое может принимать дробь$\frac{1}{a+\frac{2015}{b+\frac{1}{c}}}$(после приведения к несократимому виду). Найдите, чему равно $m+n$.

Ответ: 409

Решение. Заметим, что $\frac{1}{a+\frac{2015}{b+\frac{1}{c}}} \leq \frac{1}{a+\frac{2015}{9+\frac{1}{c}}}$для любых aи c. Поэтому нужно выбрать между дробями $\frac{1}{1+\frac{2015}{9+\frac{1}{2}}}$ и $\frac{1}{2+\frac{2015}{9+\frac{1}{1}}}$ (берем самые маленькие aи c, чтобы сделать знаменатель как можно меньше).

Вариант 2.

1. Одну из сторон прямоугольника уменьшили на 20%, а потом обе стороны увеличили на 20%. Оказалось, что периметр при этом не изменился. Во сколько раз длина прямоугольника больше его ширины?
   Ответ: 5
   Решение. Если стороны прямоугольника aи b, то старый периметр был $2(a+b)$, а новый $2(1.2\cdot 0.8a+1.2b)$.Таким образом,$2(0.96a+1.2b)=2(a+b)$. Откуда $a=5b$.

2. В арифметическом примере 414159+288726=695185 Незнайка перепутал местами две цифры. Найдите, какой правильный ответ должен был получиться у Незнайки.
   Ответ: 695885
   Решение. Перепутаны цифры во втором слагаемом и сумме. Должно быть 414159+281726=695885.

3. Сколько корней у уравнения $\left|2\cdot\left||x^2|-1\right|-2\right|=4$?
   Ответ: 4
   Решение. После сокращения на 2 последовательное раскрытие двух внешних модулей даёт два возможных варианта подмодульного выражения, но один из вариантов приводит к отрицательному значению модуля числа, и его нужно отбросить. Поэтому в итоге получится 2 варианта для значения x^2, а именно ± 4, откуда получаем только два решения.

4. Найдите количество целых чисел между 880 и 2015, сумма цифр которых равна 9 или 18. Ответ: 122
   Решение. По признаку делимости, искомые числа делятся на 9. Всего в указанном промежутке 126 таких чисел, но среди них 4 числа с суммой цифр 27: 999, 1899, 1989 и 1998.

5. Еще в древние времена математики умели раскладывать дроби в сумму простейших дробей с единичным числителем. Вот один из примеров,в котором значение одного из знаменателей было утеряно в веках:
$$\frac{2}{73}=\frac{1}{60}+\frac{1}{219}+\frac{1}{292}+\frac{1}{x}.$$
   Найдите значениеx.
   Ответ: 365
6. Незнайка выложил в линию 31 конфету. Потом он съел каждую третью конфету. Но этого ему показалось мало, и он съел из оставшихся конфет опять каждую третью. И еще раз. Сколько всего конфет слопал Незнайка?
   Ответ: 21
   Решение. В первый раз он съел 10 конфет, осталось 21. Во второй раз – 7 конфет, осталось 14. И в третий раз 4 конфеты.

7. Прямоугольник $a\times b$ таков, что a и b – натуральные числа, причем $|a-240|<20$ и $|b-270|<20$. Каждую из сторон увеличили на 1% и, оказалось, что у нового прямоугольника площадь – целое число. Найдите ab.
   Ответ: 70000

Решение. Площадь увеличилась на $\frac{201ab}{10000}$. Значит ab делится на 10000, поэтому хотя бы одно из чисел a или b делится на 25. Возможны следующие варианты: если $a = 225$, то b делится на 25 и на 16, но таких подходящих b нет; если $a = 250$, то b должно быть 280, что даёт ответ 70000; если $b = 275$, то a должно делиться и на 25 и на 16 – подходящих a нет.

8. Сколько всего правильных несократимых дробей со знаменателем 60?
Ответ: 16
Решение. Если числитель взаимно прост с числом 60, то он имеет вид $6k + 1$ или $6k - 1$. При этом $6k \pm 1 = 5k + (k \pm 1)$, т.е. делится на 5, только если $k \pm 1$ делится на 5. Потому из дробей со знаменателями вида $6k + 1$ нам не подходит 25/60 и 55/60 (а подходят оставшиеся 8 дробей), а из дробей со знаменателями вида $6k - 1$ нам не подходит 5/60 и 35/60 (и подходят 8 дробей) .