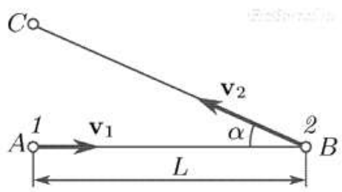
Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по физике.
2021-22 учебный год. 10 класс. Максимальный балл – 50.

Задача №1

Из точки А по направлению к точке В со скоростью $\upsilon_1 = 72$ км/ч трогается мотоциклист. Одновременно с ним из точки В по направлению к точке С со скоростью $\upsilon_2 = 20$ м/с начинает двигаться второй мотоциклист. Начальное расстояние между мотоциклистами L = 200 м. Острый угол АВС = $\alpha = 30^0$. В момент начала движения 1-ый мотоциклист бросает второму небольшой камушек и делает это столь профессионально, что второй мотоциклист ловит его без необходимости отклоняться от своей траектории либо изменять скорость. Позже при анализе видеозаписи выяснилось, что в момент времени, когда 2-ой мотоциклист поймал камушек, расстояние между мотоциклистами было минимальным.

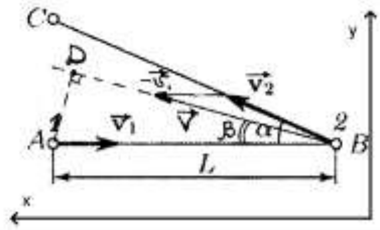


Определите с какой скоростью (модуль скорости) относительно земли был запущен камушек.

Автор: Баланов Василий Юрьевич.

Возможное решение

Рассмотрим движение 2-го мотоцикла в системе отсчета, связанной с 1-м мотоциклом.



Его скорость будет равна $\overrightarrow{v'} = \overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}$.

Перейдем к проекциям: $v'_{\text{x}} = v_1 + v_2\cos(\alpha)$,

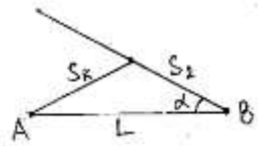
$v'_{\text{y}} = v_2\sin(\alpha)$

Модуль относительной скорости $\upsilon' = \sqrt{v_{\text{x}}^2 + v_{\text{y}}^2}$.

В этой системе отсчета 1 мотоцикл покоится, а второй движется по прямой BD. Минимальное расстояние между мотоциклами будет в момент времени, когда второй мотоцикл окажется на основании перпендикуляра, проведенного от первого мотоцикла к прямой BD. Именно эта точка обозначена на рисунке буквой D.

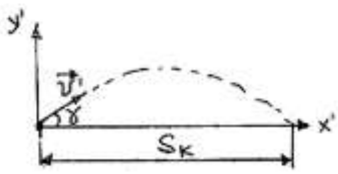
Время, в течении которого 2-й мотоцикл пройдет расстояние BD: $t = \frac{BD}{v'} = \frac{L\cos(\beta)}{v'}$, где $\cos(\beta) = \frac{v'_x}{v'}$, следовательно $\text{t} = \frac{L(\upsilon_1 + \upsilon_2\cos\alpha)}{v_1^2+v_2^2+2v_1v_2\cos\alpha} = 5$ с.

Вернемся в систему отсчета, связанную с Землей. Камень по горизонтали преодолел расстояние $S_{\text{к}}$ за время t. Второй мотоциклист за это же время проехал расстояние $S_2 = v_2 t = 100$ м



$\text{S}_{\text{к}} = \sqrt{S_2^2 + L^2 - 2S_2L\cos\alpha} \approx 124$ м

Посмотрим на траекторию камня сбоку и запишем уравнения его движения в проекциях на горизонтальную x' и вертикальную y' оси.



$$x'\colon S_{\text{к}} = v'\cos(\gamma)\,t \Rightarrow v'\cos(\gamma) = \frac{S_{\text{к}}}{t}$$

$$y\colon -v'\sin(\gamma) = v'\sin(\gamma) - gt \Rightarrow v'\sin(\gamma) = \frac{gt}{2}$$

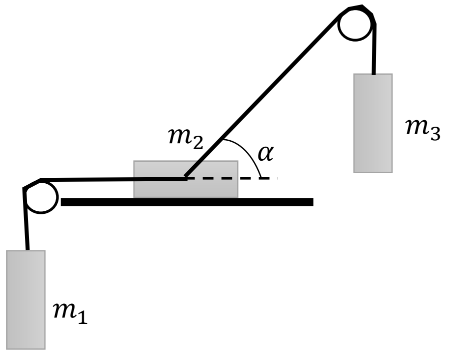
Возведем в квадрат и сложим левые и правые части уравнений, затем извлечем корень из обоих частей получившегося уравнения.

$$v' = \sqrt{\left(\frac{S_{\text{к}}}{t}\right)^2 + \left(\frac{gt}{2}\right)^2} \approx 35\ \text{м/с}$$

Критерии оценивания

№	**Критерий**	**Баллы**
1	Реализуемая идея определения момента времени, когда расстояние между мотоциклистами минимально (например, переход в систему отсчета одного из мотоциклистов)	1
2	Запись полного набора правильных уравнений, позволяющих определить время полета камня	2
3	Найдено время полета камня	1
4	Запись полного набора правильных уравнений, позволяющих определить расстояние, пройденное камнем по горизонтали	2
5	Определено расстояние, пройденное камнем по горизонтали	1
6	Запись уравнений движения камня	1
7	Найдена скорость камня (формула + число)	1+1

Задача №2.



Система состоит из трех брусков, двух неподвижных блоков и нитей. Центральный брусок расположен на гладкой горизонтальной плоскости. Масса левого бруска $m_1 = 2\sqrt{2}$ кг, масса правого бруска $m_3 = \sqrt{20}$ кг, правая нить составляет угол $\alpha = 45^o$ с горизонтом, а левая нить - горизонтальна. Изначально все тела удерживаются в покое.

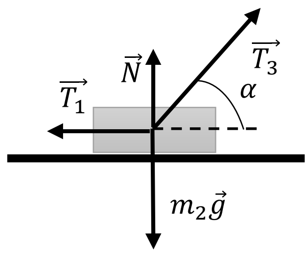
1) Пусть масса центрального бруска $m_2 = 20$ кг. Определите ускорение (модуль и направление) центра масс второго бруска в первый момент времени после того, как все тела отпустят.

2) Пусть масса центрального бруска $m_2 = 2$ кг. Крайние бруски отпускают, а центральный придерживая медленно перемещают, пока он не окажется в положении равновесия. Определите угол наклона левой нити к горизонту в положении равновесия.

Автор: Карманов Максим Леонидович

Возможное решение.

Часть 1.



Рассмотрим силы, действующие на второй брусок. Запишем второй закон Ньютона в проекции на вертикальную ось y, направленную вверх: $m_2 a_{2_y} = N + T_3 \sin(\alpha) - m_2 g$.

Заметим, что сила T_3 не может быть больше, чем $m_3 g$. С учетом численных значений масс получаем $m_2 g > T_3 \sin(\alpha)$, а так как второй брусок не может двигаться вниз, то это означает, что N>0 и ускорение второго бруска направлено по горизонтали.

Запишем для среднего бруска второй закон Ньютона в проекции на горизонтальную ось x, направленную вправо: $m_2 a_{2_x} = T_3 \cos(\alpha) - T_1$.

Также запишем второй закон Ньютона для 1-го и 3-го бруска в проекции на ось y:

$m_1 a_{1_y} = T_1 - m_1 g$;

$m_3 a_{3_y} = T_3 - m_3 g$.

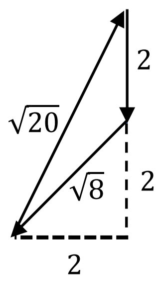
Запишем связь ускорений, следующую из нерастяжимости нитей:

$a_{1_y} = a_{2_x}$, $a_{3_y} = -a_{2_x} \cos(\alpha)$.

Из этих уравнений получим: $a_{2_x} = g \frac{m_3 \cos(\alpha) - m_1}{m_1 + m_2 + m_3 \cos^2(\alpha)} = 0{,}13$ м/с^2, так как проекция положительна, то ускорение направлено вправо.

Часть 2.

В этой части масса второго бруска сильно меньше массы третьего, поэтому скорее всего второй брусок оторвется от горизонтальной поверхности. В этом случае на него будут действовать только силы натяжения нитей и сила тяжести. Так как система находится в равновесии, то силы натяжения нитей по модулю будут равны силам тяжести, действующим на 1 и 3 бруски соответственно.



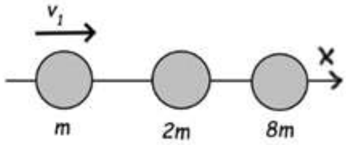
Условие равновесия для второго бруска: $\vec{T_1} + \vec{T_3} + m_2\vec{g} = \vec{0}$. Нам известна длина всех трех векторов, кроме того известно направление вектора силы тяжести. Для приблизительного построения треугольника векторов можно воспользоваться циркулем и линейкой. Также можно сразу обратить внимание на странные значения масс ($2\sqrt{2} = \sqrt{2^2 + 2^2}$, $\sqrt{20} = \sqrt{4^2 + 2^2}$). Подходящий треугольник изображен на рисунке.

Таким образом в положении равновесия вторая нить составит угол 45^o с горизонтом.

Критерии оценивания.

№	Критерий	Баллы
1.	Обосновано, что второй брусок не оторвется от горизонтальной поверхности (или это явно следует из решения, записанного в общем виде)	1
2.	Запись 2-го ЗН для второго бруска в проекции на горизонтальную ось (с вычислением проекции силы T_3)	1
3.	Запись 2-го ЗН для 1 и 3 брусков в проекции на вертикальную ось.	0,5+0,5
4.	Связь ускорений 1-го и 2-го брусков	0,5
5.	Связь ускорений 2-го и 3-го брусков	1,5
6.	Верное значение модуля ускорения (если число не верно, но формула верная)	1 (0,5)
7.	Верное направление ускорения (при наличии обоснования)	1
8.	Обосновано, что второй брусок оторвется от поверхности (или это явно следует из решения в общем виде)	1
9.	Записано условие равновесия второго бруска в векторном виде (или в виде проекций на две оси)	1 (0,5+0,5)
10.	Верный ответ на второй вопрос	1

Задача №3.



Три маленьких шара могут без трения скользить по гладкой горизонтальной спице.

Массы шаров (слева направо): m, $2m$ и $8m$. Изначально первому шарику сообщают скорость v_1, направленную ко второму шарику (вправо), остальные шары покоятся. Удары шаров друг о друга абсолютно упругие.

1. Какие скорости будут иметь шары после первого соударения?
2. Какие скорости будут иметь шары после второго соударения?
3. Сколько всего соударений произойдет?
4. Какие скорости будут иметь шары после всех соударений?

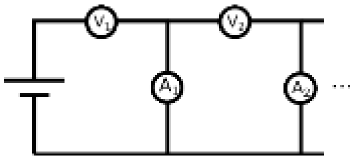
Автор: Воронцов Александр Геннадьевич.

Возможное решение и критерии оценивания.

№	Этап решения	балл
1	Рассмотрим удар первого шара о второй. Так как далее последует аналогичный удар второго шара о третий, то введем параметр k, равный отношению массы покоящегося шара к массе налетающего (для первого удара $k = 2$). При ударах выполняется ЗСИ, запишем его в проекции на ось x: $mv_1 = mv'_{1_x} + kmv'_2$	1
2	При ударах выполняются ЗСЭ: $\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv'^2_{1_x}}{2} + \frac{kmv_2'^2}{2}$	1
3	Решая систему находим $v'_{1_x} = \frac{1-k}{1+k}\, v_1 = -\frac{v_1}{3}$ (для $k = 2$), $v'_2 = \frac{2}{k+1} v_1 = \frac{2v_1}{3}$ (для $k = 2$)	0,5+0,5
4	Аналогично находим скорости после второго удара (начальная скорость $v'_2, k = 4$). Для второго шара: $v''_{2\,x} = \frac{1-k}{1+k}\, v'_2 = -\frac{3}{5} * \frac{2}{3} v_1 = -\frac{6}{15} v_1$. Для третьего шара: $v''_3 = \frac{2}{k+1} v'_2 = \frac{2}{5} * \frac{2}{3} v_1 = \frac{4}{15}\, v_1$.	1+1
5	Заметим, что скорость первого шара после удара меньше скорости второго шара после двух ударов и обе направлены влево, поэтому произойдет 3 удара. *Для информации: перед третьим ударом скорости шаров* $v''_{1_x} = -\frac{v_1}{3}$ *(влево),* $v''_{2_x} = -\frac{6}{15}\, v_1$*.(влево),* $v''_3 = \frac{4}{15}\, v_1$*.(вправо).*	1
6	Законы сохранения для последнего удара: $mv''_{1_x} + 2mv''_{2_x} = mv'''_{1_x} + 2mv'''_{2_x}$ $\frac{mv''^2_{1_x}}{2} + \frac{2mv''^2_{2_x}}{2} = \frac{mv'''^2_{1_x}}{2} + \frac{2mv'''^2_{2_x}}{2}$	1+1
7	После решения системы получаем: $v'''_{1_x} = -\frac{19}{45} v_1$	1+1

	$v'''_{2_x} = -\frac{16}{45} v_1$ *Окончательный ответ:* $v'''_{1_x} = -\frac{19}{45} v_1$ *(влево)*, $v'''_{2_x} = -\frac{16}{45} v_1$ *(влево)*, $v''_3 = \frac{4}{15}\, v_1$ *(вправо)*.	

Задача №4.

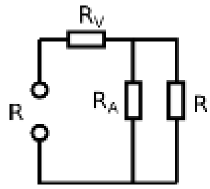


Электрическая цепь состоит из бесконечного количества одинаковых амперметров и одинаковых вольтметров, подключенных к источнику постоянного напряжения так, как это показано на рисунке. Отношение показаний второго вольтметра к показаниям первого вольтметра $\frac{U_2}{U_1} = k = 0{,}1$. Чему равно отношение сопротивлений вольтметра и амперметра R_V/R_A?

Автор: Соболев Андрей Николаевич

Возможное решение

Вариант 1



Вначале найдем сопротивление всей цепи. Для этого заметим, что бесконечная цепь не изменяет своего сопротивления при добавлении звеньев. Обозначим эквивалентное сопротивление бесконечной цепи за R. Добавим одно звено. Эквивалентное сопротивление получившейся цепи также должно быть равно R. Выразим R, обозначив искомое соотношение R_V/R_A за x:

$$R = R_V + \frac{RR_A}{R+R_A}$$

$$R^2 + RR_A = RR_V + R_AR_V + RR_A$$

$$R^2 - RR_V - R_AR_V = 0$$

$$R = \frac{R_V + \sqrt{R_V^2 + 4R_AR_V}}{2} = \frac{R_V}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{x}}\right).$$

Ток, текущий через первый вольтметр, равен току через источник $I_{V_1} = \frac{U}{R}$ (U – напряжение на источнике), а показания первого вольтметра $U_1 = IR_V = \frac{R_V}{R}U$.

Напряжение на первом амперметре $U_{A_1} = U - U_1 = U\left(1 - \frac{R_V}{R}\right)$, а ток через него $I_{A_1} = \frac{U_{A_1}}{R_A} = \frac{U}{R_A}\left(1 - \frac{R_V}{R}\right)$.

Тогда ток через второй вольтметр $I_{V_2} = I_{V_1} - I_{A_1} = \frac{U}{R} - \frac{U}{R_A}\left(1 - \frac{R_V}{R}\right)$, а напряжение на втором вольтметре $U_2 = I_{V_2}R_V = \frac{R_V}{R}U - \frac{R_V}{R_A}U\left(1 - \frac{R_V}{R}\right)$.

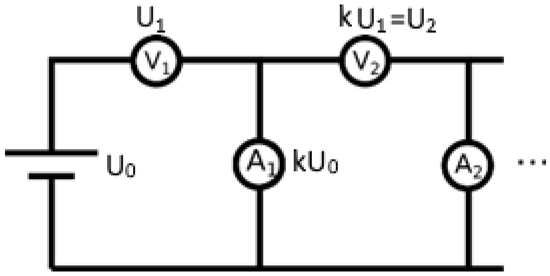
Находим искомое отношение

$$\frac{U_2}{U_1} = 1 - \frac{R}{R_A} + \frac{R_V}{R_A} = 1 - \frac{x}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{x}}\right) + x = 0{,}1.$$

Решив полученное уравнение относительно x получим $x = 8.1$.

Вариант 2.

Пусть напряжение источника равно U_0. Мысленно «отрежем» от цепочки первое звено (первый амперметр и первый вольтметр). Определим каким должно быть напряжение источника, чтобы через оставшиеся амперметры и вольтметры текли такие же токи, как в исходной цепи. Так как цепь после удаления одного звена перешла сама в себя (в силу ее бесконечности), то соотношения между токами и напряжениями на элементах должны сохраниться. Напряжение на втором вольтметре, который занял место первого,



изменилось в k раз, значит и напряжение на новом источнике должно в k раз отличаться от U_0. Получим распределение напряжений как показано на рисунке.

Для левого контура можем записать: $U_0 = U_1 + kU_0$, откуда $U_0 = \frac{U_1}{1-k}$.

Запишем связь токов через первые два вольтметра и первый амперметр: $\frac{U_1}{R_V} = \frac{kU_1}{R_V} + \frac{kU_0}{R_A} = \frac{kU_1}{R_V} + \frac{kU_1}{R_A(1-k)}$.

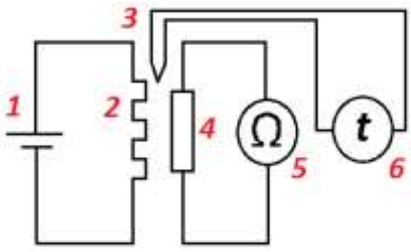
Решив уравнение получим: $\frac{R_V}{R_A} = \frac{(k-1)^2}{k} = 8{,}1$.

Критерии оценивания

№	**Критерий**	**Баллы**
1	Использована идея бесконечности цепи	2
2	Записана связь токов на разветвляющемся участке цепи	1
3	Записана связь напряжений в контуре	1
4	Записан полный набор исходных уравнений, позволяющих получить ответ	3
5	Получен конечный ответ (если формула верная, а число нет, то 2 балла)	3 (2)

Задача №5.

Известно, что электрическое сопротивление проводников с ростом температуры увеличивается по линейному закону: $R = R_0(1 + \alpha t)$, где t – температура в градусах Цельсия, R_0 – сопротивление проводника при 0 ^{0}C, α – температурный коэффициент сопротивления.



Для изучения данной зависимости, экспериментатор собрал установку, электрическая схема которой приведена на рисунке. Источник питания 1 подключен к электронагревателю 2. При включении источника начинается нагрев проводника 4. Для измерения сопротивления проводник подключен к омметру 5. Температуру образца измеряют с помощью термопары 3, которая подключена к мультиметру 6.

В результате были получены следующие данные.

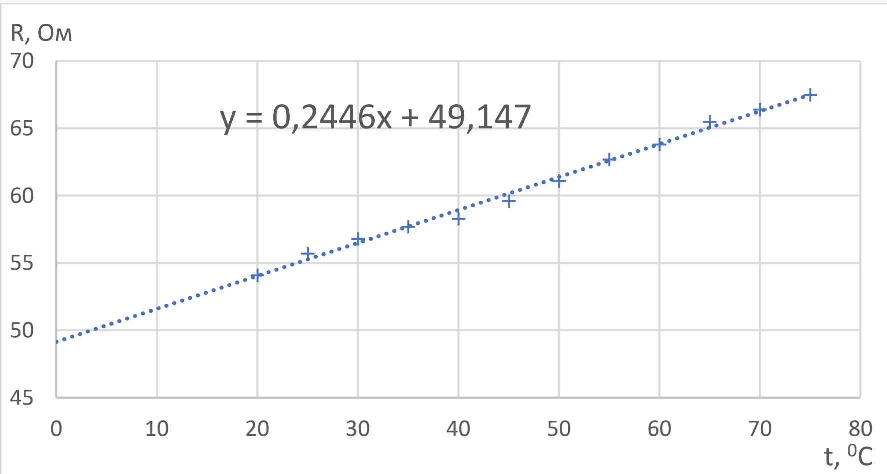
t, ^{0}C	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75
R, Ом	54,1	55,7	56,8	57,7	58,3	59,6	61,1	62,7	63,8	65,5	66,4	67,5

1) По данным таблицы постройте график зависимости сопротивления проводника от температуры.
2) С помощью графика определите температурный коэффициент сопротивления.

Автор: Гусев Андрей Владиславович

Возможное решение

1. Построим график, при этом ось температур необходимо начинать с нуля градусов Цельсия.



2. Построенная зависимость должна представлять собой прямую. Если её продолжить до пересечения с осью сопротивлений, то точка пересечения дает значение R_0. Из графика получаем $R_0 = 49$ Ом.
3. Взяв две удобные точки графика, определяем угловой коэффициент полученной прямой:

$$k = \frac{R_2 - R_1}{t_2 - t_1} = 0{,}244 \frac{\text{Ом}}{^oC}$$

4. Определяем температурный коэффициент сопротивления:

$$\alpha = \frac{k}{R_0} = 5{,}0 \cdot 10^{-3} \quad {^oC^{-1}}$$

Критерии оценивания:

№	Критерий	Балл
1	Построен график	
	1. Ось температур начата с 0 ^{0}C	1
	2. Выбран разумный масштаб, в результате чего график занимает большую часть координатного поля, все оси подписаны	1
	3. Нанесены все экспериментальные точки	1
	4. Проведена усредняющая прямая	1
2	С помощью графика экстраполяцией определено значение $R_0 = (49{,}0 \pm 0{,}5)$ Ом (или $R_0 = (49{,}0 \pm 1)$ Ом)	2 (1)
3	Найден угловой коэффициент линейной зависимости $k = (0{,}24 \pm 0{,}01)\,\frac{\text{Ом}}{^oC}$. (Если для определения k использовались точки разность температур между которыми менее 30^oC, то максимум 1 балл)	2 (1)
4	Определен температурный коэффициент сопротивления $\alpha = (5{,}0 \pm 0{,}2) \cdot 10^{-3}\ \ {}^oC^{-1}$ (или $\alpha = (5{,}0 \pm 0{,}5) \cdot 10^{-3}\ \ {}^oC^{-1}$)	2 (1)