Школьный этап олимпиады по математике

Сентябрь 2014 г.

9 класс

1 блок

1. (5 б.) По шоссе едет грузовик со скоростью 65 км/ч, за ним едет автобус со скоростью 80 км/ч. На каком расстоянии друг от друга (в метрах) будут эти автомобили через три минуты после того, как автобус догонит грузовик?

Ответ: 750.

Решение. После того, как автобус догонит грузовик, он будет удаляться от него со скоростью 15 км/ч. Искомое расстояние равно $15 \cdot \frac{1}{20} = \frac{3}{4}$ км $= 750$ м.

2. (6 б.) Найдите наибольшее четырёхзначное число вида *43*, которое делится на 45.

Ответ: 6435.

Решение. Число должно одновременно делиться на 5 и на 9. Значит, во-первых, его последняя цифра 0 или 5, а, во-вторых, сумма цифр кратна 9. Всего два числа удовлетворяют этим условиям: 2430 и 6435. Большее из них 6435.

3. (7 б.) Найдите x, если

$$1-(2-(3-(\ldots(2012-(2013-(2014-x)))\ldots)))=1000.$$

Ответ: 2007.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения:

$$1-2+3-\ldots-2012+2013-2014+x=$$

$$=(1-2)+(3-4)+\ldots+(2013-2014)+x=-1007+x.$$

Отсюда $x=1000+1007=2007$.

4. (6 б.) В остроугольном треугольнике ABC провели медиану AM и высоту CH. Найдите BC, если $MH=12$.

Ответ: 24.

Решение. HM — медиана, проведённая к гипотенузе в прямоугольном треугольнике CHB. Поэтому $CB=2HM$.

Замечание. В условии задачи была, к большому сожалению, опечатка: требовалось найти не BC, а AC.

5. (6 б.) На прямой было отмечено несколько точек. Между каждыми двумя соседними точками поставили ещё по одной точке. Такую же операцию проделали ещё 3 раза. В итоге на прямой оказалось 97 точек. Сколько их было первоначально?

Ответ: 7.

Решение. Пусть вначале было n точек. После выполнения операции их станет $2n-1$, так как имеется ровно $n-1$ промежутков между n точками, и, значит, к n точкам добавится ещё $n-1$ точек. Далее количество точек будет меняться так:

$$2(2n-1)-1=4n-3;\ 2(4n-3)-1=8n-7;\ 2(8n-7)-1=16n-15.$$

Итак, $16n-5=97$. Отсюда $n=7$.

6. (**6 б.**) В треугольнике ABC угол C в три раза больше угла A. На стороне AB отмечена такая точка D, что $BD=BC$. Найдите CD, если $AD=4$.

Ответ: 4.

Решение. Пусть $x=\angle A$, $y=\angle BCD$. Тогда $\angle C=3x$, $\angle BDC=y$ (поскольку треугольник DBC равнобедренный,

$$\angle ACD=\angle C-\angle BCD=3x-y.$$

Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, не смежных с этим внешним:

$$\angle BDC=\angle A+\angle ACD;\quad y=x+(3x-y).$$

Отсюда $2y=4x$, $y=2x$, $\angle ACD=3x-y=3x-2x=x$. Значит, треугольник ADC равнобедренный и $CD=AD$.

7. (**6 б.**) Найдите наибольшее целое решение неравенства $|x+14|<|x-2000|$.

Ответ: 992.

Решение. Левая и правая части неравенства — это расстояния от точки x до точек -14 и 2000. Середина отрезка $[-14;2000]$ — точка 993. Слева от неё — все точки, которые ближе к левому концу отрезка, а справа — точки, которые ближе к правому концу отрезка. Таким образом, $|x+14|<|x-2000| \iff x<993$.

8. (**7 б.**) Известно, что $a+b+c=7$; $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}=0{,}6$. Вычислите $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}$.

Ответ: 1,2.

Решение. Перемножим левые части данных равенств:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)=1+\frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{c+a}+1+\frac{c}{a+b}.$$

Значит, $7\cdot 0{,}6=4{,}2=3+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$, откуда $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1{,}2$.

Школьный этап олимпиады по математике

Сентябрь 2014 г.

9 класс

2 блок

1. (**5 б.**) По шоссе едет велосипедист Петя со скоростью 15 км/ч, за ним едет велосипедист Вася со скоростью 25 км/ч. На каком расстоянии друг от друга (в метрах) будут Петя и Вася через три минуты после того, как Вася догонит Петю?

Ответ: 500.

Решение. После того, как Вася догонит Петю, он будет удаляться от него со скоростью 10 км/ч. Искомое расстояние равно $10 \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{2}$ км $=$ 500 м.

2. (**6 б.**) Найдите наименьшее четырёхзначное число вида *43*, которое делится на 45.

Ответ: 2430.

Решение. Число должно одновременно делиться на 5 и на 9. Значит, во-первых, его последняя цифра 0 или 5, а, во-вторых, сумма цифр кратна 9. Всего два числа удовлетворяют этим условиям: 2430 и 6435. Меньшее из них 2430.

3. (**7 б.**) Найдите x, если

$$2014 - (2013 - (2012 - (\ldots(3 - (2 - (1 - x)))\ldots))) = 1000.$$

Ответ: -7.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения:

$$2014 - 2013 + 2012 - \ldots - 3 + 2 - 1 + x =$$

$$= (2014 - 2013) + (2012 - 2011) + \ldots + (2 - 1) + x = 1007 + x.$$

Отсюда $x = 1000 - 1007 = -7$.

4. (**6 б.**) В остроугольном треугольнике ABC провели медиану AM и высоту CH. Найдите MH, если $BC = 36$.

Ответ: 18.

Решение. HM — медиана, проведённая к гипотенузе в прямоугольном треугольнике CHB. Поэтому $CB = 2HM$.

Замечание. В условии задачи была, к большому сожалению, опечатка: требовалось найти не BC, а AC.

5. (**6 б.**) На прямой было отмечено несколько точек. Между каждыми двумя соседними точками поставили ещё по две точки. Такую же операцию проделали ещё 2 раза. В итоге на прямой оказалось 109 точек. Сколько их было первоначально?

Решение. Пусть вначале было n точек. После выполнения операции их станет $3n-2$, так как имеется ровно $n-1$ промежутков между n точками, и, значит, к n точкам добавится ещё $2(n-1)$ точек. Далее количество точек будет меняться так:

$$3(3n-2)-2=9n-8; \quad 3(9n-8)-2=27n-26.$$

Итак, $27n-26=109$. Отсюда $n=5$.

6. (**6 б.**) В треугольнике ABC угол C в три раза больше угла A. На стороне AB отмечена такая точка D, что $BD=BC$. Найдите AD, если $CD=5$.

Ответ: 5.

Решение. Пусть $x=\angle A$, $y=\angle BCD$. Тогда $\angle C=3x$, $\angle BDC=y$ (поскольку треугольник DBC равнобедренный,

$$\angle ACD=\angle C-\angle BCD=3x-y.$$

Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, не смежных с этим внешним:

$$\angle BDC=\angle A+\angle ACD; \quad y=x+(3x-y).$$

Отсюда $2y=4x$, $y=2x$, $\angle ACD=3x-y=3x-2x=x$. Значит, треугольник ADC равнобедренный и $CD=AD$.

7. (**6 б.**) Найдите наименьшее целое решение неравенства $|x-14|<|x+2000|$.

Ответ: -992.

Решение. Левая и правая части неравенства — это расстояния от точки x до точек 14 и -2000. Середина отрезка $[-2000;14]$ — точка -993. Слева от неё — все точки, которые ближе к левому концу отрезка, а справа — точки, которые ближе к правому концу отрезка. Таким образом, $|x-14|<|x+2000| \iff x>-993$.

8. (**7 б.**) Известно, что $a+b+c=8$; $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}=0{,}5$. Вычислите $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}$.

Ответ: 1.

Решение. Перемножим левые части данных равенств:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)=1+\frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{c+a}+1+\frac{c}{a+b}.$$

Значит, $8\cdot 0{,}5=4=3+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$, откуда $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1$.