

ИМ по математике. Заключительный тур. 6 класс

1. Костя заполнил квадрат 3 на 3 различными целыми числами, модуль которых меньше 10. Оказалось, что произведение любых соседних чисел отрицательно. Может ли сумма чисел в каждом квадрате 2 на 2 быть не меньше 10?

Ответ: да, может

Решение:

пример

6	-1	5
-4	9	-2
8	-3	7

Критерии:

любой верный пример 5 баллов. Объяснение того, что все нужные суммы не меньше 10, еще 2 балла. За отсутствие описания процесса получения расстановки, а также за отсутствие объяснения отрицательности произведений соседей баллы не снижать.

2. На планете АнтиЗемля находятся материки и океаны. Океаны граничат только с материками, причём каждый ровно с 5. А каждый материк граничит с 3 океанами и 3 материками. Сколько материков и океанов на этой планете, если всего их не больше 31?

Ответ: 16.

Решение:

Поскольку каждый океан граничит с 5 материками и каждый материк граничит с 3 океанами, количество океанов, умноженное на 5 равно количеству материков, умноженному на 3. Значит количество океанов делится на 3, а количество материков – на 5. Пусть океанов $3x$, тогда материков $5x$, а всего океанов и материков – $8x$. Тогда их может быть 8, 16 или 24, а материков соответственно 5, 10 или 15. Каждый материк граничит с 3 материками. Поскольку количество «соседств» между материками можно найти как $\frac{3 \cdot \text{Количество материков}}{2}$, то количество материков должно быть чётным, и их 10. А всего океанов и материков – 16.

Критерии:

полное решение – 7 баллов

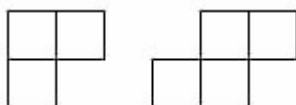
показано, что количество океанов делится на 3, а количество материков на 5 – 2 балла

найден возможное количество океанов и материков (8, 16, 24) – 2 балла

доказательство того, что количество материков – чётно – 2 балла. Баллы суммируются.

за отсутствие примера, в том числе графа, баллы не снижать (так как по условию планета существует, а возможный вариант только один)

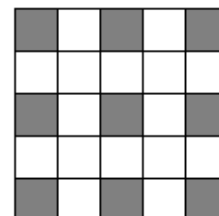
3. Можно ли доску 5x5 замостить без наложений фигурками "уголок" и "зигзаг"? Фигурки можно поворачивать и переворачивать.



Ответ: нельзя

Решение:

Посмотрим на 9 закрашенных клеток: если фигурка «уголок» или «зигзаг» покрывает закрашенную клетку, то она не может покрыть никакую другую



закрашенную клетку. Поскольку все закрашенные клетки должны быть покрыты, то нам понадобится хотя бы 9 фигурок «уголок» или «зигзаг». Но они покроют хотя бы $3 \cdot 9 = 27$ клеток, а в квадрате 5×5 всего 25 клеток, значит замостить без наложений фигурками «уголок» и «зигзаг» квадрат 5×5 не получится.

Критерии: полное решение – 7 баллов

4. На клетчатой доске нарисован квадрат 3 на 3 см. Петя и Вася решили сыграть в игру (начинает Петя). За ход разрешается сделать прямолинейный разрез сначала квадрата, а затем одного из образованных прямоугольников по своему выбору, параллельно линии сетки. Каждый сделает ровно по 5 ходов. Если суммарный периметр всех получившихся неразрезанных прямоугольников будет не меньше 45 см, то выиграет Петя, а если нет - Вася. Кто выиграет при правильной игре?

Ответ: Петя

Решение:

Поймём, что каждый разрез прибавляет к сумме периметров удвоенную длину разреза. Изначально периметр квадрата $3 \cdot 4 = 12$. Первым ходом Петя делает вертикальный разрез посередине исходного квадрата, добавляя к сумме периметров $2 \cdot 3 = 6$. Вася же первым ходом может сделать один из двух видов ходов. Первый – вертикальный разрез одного из прямоугольников, тем самым также добавив к сумме периметров 6. Второй – горизонтальный разрез одного из прямоугольников, тем самым также добавив к сумме периметров 3. Назовем прямоугольник *целым*, если его высота равна 3 и его еще никто не разрезал. После хода Васи один из образованных к тому моменту прямоугольников – целый. Следующим ходом Петя делает вертикальный разрез посередине целого прямоугольника, это еще плюс 3 к сумме. Заметим, что перед каждым ходом Пети всегда найдется хотя бы один целый прямоугольник, так как перед ходом Васи их хотя бы два, и он сможет ликвидировать своим ходом максимум один. Получается за свои 5 ходов Петя прибавит $6 \cdot 5 = 30$, а Вася за первый ход хотя бы 3, итого после всех ходов сумма периметров будет не меньше 45

Критерии:

полное решение – 7 баллов

осознание факта (возможно без обоснования), что любой разрез прибавляет к сумме периметров свою удвоенную длину - 1 балл

5. Какое наибольшее количество натуральных чисел среди первых 100 можно выбрать так, что сумма никаких двух из выбранных не делилась на 13?

Ответ: 49

Решение:

Всего 13 остатков при делении на 13 (0,1,2,...,12). Количества чисел от 1 до 100 каждого остатка указаны в

остаток	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
количество	7	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	7	7

таблице. Сумма двух чисел делится на 13 если оба числа делятся на 13 или если сумма их остатков равна 13. Это означает, что выбирать в наш набор числа одновременно из групп 1 и 12, 2 и 11, 3 и 10, ... , 6 и 7 нельзя. Тогда из каждой из этих пар групп мы можем выбрать не более 8 чисел (это наибольшее количество чисел в одной из групп). Также мы можем выбрать не более одного числа с остатком 0. Итого не более $6 \cdot 8 + 1 = 49$ чисел. Например: 13 и все числа имеющие остатки 1,2,3,...,6 при делении на 13.

Критерии:

полное решение – 7 баллов

идея парных остатков – 1 балл

отсутствие конструкции примера минус 1 балл

среди выбранных чисел нет числа делящегося на 13 минус 1 балл