Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

**2014-2015 учебный год**

**11 класс**

1. Коля, Петя и Вася играют в настольный теннис «навылет»: игрок, проигравший партию, уступает место игроку, не участвовавшему в ней. В итоге оказалось, что Коля сыграл 8 партий, Петя – 17. Сколько партий сыграл Вася?

**Решение.** Всего партий было не менее 17. В каждой паре соседних партий Коля принимал участие. Т.к. он сыграл 8 партий, то партий было ровно 17, и он играл во всех четных. Значит, Вася сыграл 9 партий.

**Оценивание.** Полное решение – 7 баллов. Правильный ответ без обоснования – 1 балл.

1. Существуют ли такие три квадратных трёхчлена, что каждый из них имеет корень, а сумма любых двух из них корней не имеет?

**Решение.** Да, например: x², (x-1)² и (x+1)².

**Оценивание.** Полное решение – 7 баллов. Правильный ответ без обоснования – 0 баллов.

1. Три острых угла вместе составляют прямой угол. Докажите, что сумма косинусов этих трех углов больше суммы их синусов.

**Решение.** Косинус первого угла равен (по формуле дополнения) синусу суммы двух других углов, и, значит, больше синуса каждого из них. Складывая полученные неравенства, получим требуемое.

**Оценивание.** Полное решение – 7 баллов.

1. В окружности хорда PQ проходит через середину хорды AB, и перпендикулярна диаметру AC. Найдите AB, если AP=1.

**Решение.** Пусть T – середина AB, S – середина AP, F – точка пересечения PQ и AC,

 O – центр окружности. Треугольники AOT и ATF прямоугольны и подобны (у них общий угол A). Значит, AO : AT = AT : AF, так что AT∙AT = AO∙AF. Аналогично, из подобия тр-ков AOS и APF получим AP∙AS = AO∙AF. Поскольку AP=1, AS=1/2, получим AT² =1/2, откуда AB²=2.

**Оценивание.** Полное решение – 7 баллов.

1. Фальшивомонетчик дядя Коля за 10 дней изготовил 2014 фальшивых пятитысячных монет. Его внук Петя с целью оптимизации работы деда рассчитал производительность труда (количество монет, изготовленных за k подряд идущих дней, деленное на k) для всех k = 1,2,…,10 и всех этапов производства. Докажите, что произведение всех полученных Петей 45 чисел – целое число.

**Решение.** Подсчитаем, сколько монет изготовлено в первый день, сколько – за первые 2 дня, сколько – за первые 3 дня, и т.д., добавим к набору число 0 – всего получим 11 чисел. Рассмотрим также набор из чисел: 0,1,2,3,…,10. Достаточно показать, что произведение всех попарных разностей первого набора делится на произведение всех попарных разностей второго набора. Пусть s – натуральное, не превышающее 10. Разобьём все числа набора на кучки с одинаковыми остатками (при делении на s). Различных остатков – s, так что получится всего s кучек (некоторые, возможно, пустые). Разность двух чисел из одной кучки делится на s, из разных кучек – не делится. Поэтому количество попарных разностей набора, кратных s, равно суммарному количеству пар из одной кучки. Заметим, что при насильственном перемещении числа из большей кучки в меньшую такая сумма уменьшается (если объёмы кучек различаются больше чем на 1). Поэтому такая сумма будет минимальной в случае, когда объемы всех кучек равны, или различаются не более чем на 1. Но именно такое разбиение на кучки и имеет место для второго набора чисел. Поэтому, для любого s, количество попарных разностей, кратных s, для первого набора не меньше, чем для второго. Но 2 входит в произведение разностей в степени, равной: количество разностей, кратных 2, плюс количество разностей, кратных 4, плюс .... , и для первого набора все эти количества не меньше, чем для второго. То же самое верно и для любого простого p>2. Поэтому произведение разностей первого набора делится на произведение разностей второго.

**Оценивание.** Полное решение – 7 баллов.