8 класс

1. Дима написал в тетради последовательность из 0 и 1. Затем он заметил, что единица идёт после нуля 16 раз, 15 раз 0 идёт после 1 и восемь раз 0 идёт после 01. Сколько раз после 11 идёт 0?

Ответ. 7.

Решение. Сочетание 01 встречается в тетради 16 раз, а сочетание 10 – 15 раз. Следовательно, строка начинается с 0, то есть перед каждым сочетанием 10 есть либо 0, либо 1. По условию восемь раз это 0, поэтому сочетание 110 встречается $15 - 8 = 7$ раз.

Критерии. Полное решение – 7б. Замечено, что строка начинается с 0 без дальнейших продвижений – 2б. Рассмотрены частные случаи конкретных последовательностей и получен верный ответ – 1б. Только ответ – 0б.

2. Маша нарисовала в тетради ромб и в вершинах написала четыре числа, сумма которых равна 2021. Затем она на каждой стороне ромба написала произведение чисел, стоящих в её концах и вычислила сумму чисел, записанных на сторонах. Катя увеличила все числа, написанные Машей в вершинах на 1, а затем повторила то, что делала Маша и вычислила новую сумму чисел на сторонах. На сколько Катина сумма больше Машиной?

Ответ. 4046.

Решение. Пусть Маша написала в вершинах ромба числа a, b, c, d, тогда $a + b + c + d = 2021$, и она получила сумму произведений

$$ab + bc + cd + da = (a + c)(b + d).$$

Так как Катя увеличила на 1 каждое число, то её сумма

$$(a + c + 2)(b + d + 2) = (a + c)(b + d) + 2(a + b + c + d) + 4$$

больше Машиной на $2(a + b + c + d) + 4 = 2 \cdot 2021 + 4 = 4046$.

Критерии. Полное решение – 7б. Рассматрен частный случай с верным ответом – 1б. Только ответ – 0б.

3. В треугольнике MNK $MN = NK$. Из точки A на стороне MN опущен перпендикуляр AP на сторону NK. Оказалось, что $MA = AP$. Найдите угол $\angle PMK$.

Ответ. 45°.

Решение. По теореме о внешнем угле $\angle MAP = 90^\circ + \angle MNK$(см.рис.). Так как

$$\angle MNK + 2\angle NMK = 180^\circ$$

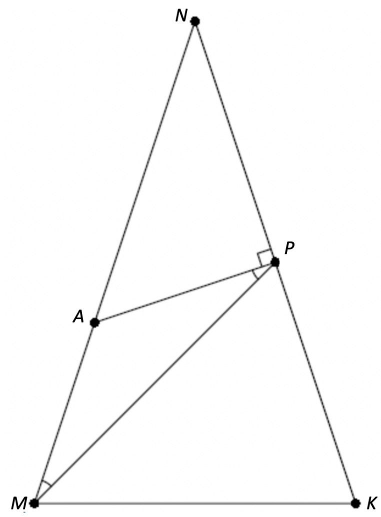
(ΔMAP – равнобедренный), следовательно,

$$\angle MAP = 270^\circ - 2\angle NMK.$$

Тогда

$$\angle AMP = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle MAP) = \angle NMK - 45^\circ.$$

Следовательно, $\angle PMK = 45^\circ$.



Критерии. Полное решение – 7б. Могут быть другие решения. Решение по типу: допустим угол равен 45°, тогда получится всё – 0б. Только ответ – 0б.

4. Саша выписал на доску натуральное число M и посчитал сумму его цифр и получил 100, а затем заметил, что если умножить число M на 5, то сумма цифр станет равна 50. Затем он сообщил это Маше. Маша тут же заявила, что M – чётно. Не ошибается ли Маша?
Ответ. Не ошибается.
Решение. Обозначим через $s(A)$ сумму цифр числа A. Из рассмотрения сложения "в столбик" двух чисел A и B следует, что $s(A+B) \leqslant s(A)+s(B)$, причём равенство достигается в том и только том случае, когда при сложении нет переносов через разряд. Тем самым, из условия задачи вытекает, что при сложении $5M+5M=10M$ нет переносов через разряд, поскольку $s(10M)=s(M)=100$. Но число $5M$ оканчивается на 5 или на 0 в случае соответственно нечетного и чётного M. первый случай отпадает, так как возникает перенос в последнем разряде.
Критерии. Полное решение – 7б. Приведены примеры конктретных чисел с такими свойствами – 0б.

5. Петя и Вася нашли два пакета карамелек и одну огромную шоколадку. Найденное, они решили поделить, играя в следующую игру: первым ходом Петя забирает себе из пакета несколько карамелек (пакет из которого он берет карамельки он выбирает по своему усмотрению) и перекладывает из этого же пакета в другой такое же количество карамелек. Затем так же поступает Вася (пакет из которого он берет карамельки он выбирает по своему усмотрению). И так до тех пор пока по таким правилам можно брать карамельки. Тому, кто взял карамельку последним, достаётся шоколадка и он считается победителем. Кто победит при правильной игре, если в пакетах:
а) 2021 и 2021 карамелек?
б) 1000 и 2000 карамелек?
Ответ. а) Вася; б) Петя.
Решение. а) Симметричная стратегия. Пусть Вася на каждом шагу берёт столько же карамелек, что и Петя, но из другого мешка. Очевидно, что в этом случае Вася всегда может сделать ответный ход. Каждый раз после хода Васи разность числа карамелек в пакетах будет той же, что и вначале, значит, после некоторого его хода в одном пакете карамелек вообще не будет, а в другом не более одной, значит, Петя не сможет сделать ход и проиграет.
б) Первым ходом Петя берёт из пакета где 2000 карамелек 333 карамельки и далее играет симметрично (см. пункт а)). После первого хода Пети в пакетах останется 1333 и 1334 карамельки

соответственно. Какой бы ход не сделал Вася у Пети всегда найдётся ход. Действительно, если Вася возьмёт карамельки из пакета в котором 1333, то ответных ход всегда найдётся, так как какое бы количество карамелек он не взял в другом пакете карамелек было больше и, следовательно, мы сможем повторить ход. Осталось показать, что если Вася будет брать карамельки из пакета где их больше, то ход так же будет. Пусть у нас есть пакет в котором n и в котором $n+1$ карамельки. Когда Вася возьмёт карамельки из пакета в котором $n+1$, то он переложит хотя бы одну карамельку в пакет где n карамелек и там будет хотя бы $n+1$ карамелька, следовательно, ход всегда найдётся.

Критерии. Полное решение – 7б. Решен только пункт а) – 2б. Решен только пункт б) – 5б. Только ответ – 0б.