Школьный этап олимпиады по математике

Октябрь 2019 г.

10 класс

1 блок

1. Сколько трёхзначных чисел среди членов арифметической прогрессии 2, 7, 12, 17, 22,...?

Ответ: 180.

Решение. Среди любых пяти подряд идущих натуральных чисел ровно одно входит в указанную прогрессию. Девятьсот трёхзначных чисел разбиваются на 180 пятёрок.

2. Кран с холодной водой заполняет ванну за 19 мин, а с горячей за 23 мин. Открыли кран с горячей водой. Через сколько минут нужно открыть кран с холодной водой, чтобы к тому моменту, как ванна будет заполнена полностью, в ней холодной и горячей воды было поровну?

Ответ: Через 2 минуты.

Решение. Половина ванны заполняется горячей водой за 11,5 минут, а холодной водой за 9,5 минут. Значит, кран с горячей водой должен быть открыт на 2 минуты дольше.

3. Периметр параллелограмма 360, а его острый угол 60°. Меньшая диагональ делит его соответствующие углы в отношении $3:1$. Найдите меньшую сторону параллелограмма.

Ответ: 60.

Решение. Пусть в параллелограмме $ABCD$ острый угол 60° при вершине A. Тогда тупой угол при вершине D равен 120°. Имеем $\angle ADB = 30^\circ$, $\angle BDC = 90^\circ = \angle ABD$. Если в треугольнике ABD катет $AB = a$, то $AD = 2a$. Отсюда периметр равен $6a = 360$.

4. Пусть A — 2019-значное число, все цифры которого единицы. Найдите остаток от деления A на 7.

Ответ: 6.

Решение. Заметим, что $111111 = 111 \cdot 1001 = 111 \cdot 7 \cdot 143$. Число из 6 единиц делится на 7. Будем последовательно убирать слева по 6 единиц. От этого остаток от деления на 7 не меняется. Поскольку $2019 = 6 \cdot 336 + 3$, в конце концов придём к числу 111, которое при делении на 7 даёт остаток 6.

5. Найдите сумму корней уравнения

$$\frac{x^2+2x+2}{x+1} + \frac{x^2+8x+20}{x+4} = \frac{x^2+4x+6}{x+2} + \frac{x^2+6x+12}{x+3}.$$

Ответ: $-2{,}5$.

Решение. Если выделить целые части всех дробей, то после упрощения придём к уравнению

$$\frac{1}{x+1} + \frac{4}{x+4} = \frac{2}{x+2} + \frac{3}{x+3},$$

которое сводится к квадратному.

6. Пусть $f\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right) = \dfrac{x+3}{x-1}$ для любого числа $x \neq \frac{1}{2}, 1$. Вычислите $f(1)$.

Ответ: 5.

Решение. $\frac{x+1}{2x-1} = 1 \iff x = 2$. Поэтому $f(1) = \frac{2+3}{2-1} = 5$.

7. Вычислите $1000 \cdot 999 - 998 \cdot 997 + 996 \cdot 995 - \ldots + 4 \cdot 3 - 2 \cdot 1$.

Ответ: 500500.

Решение. Удобно группировать по два слагаемых:

$$\sum_{n=1}^{250} (4n \cdot (4n-1) - (4n-2)(4n-3)) = \sum_{n=1}^{250} (16n - 6) =$$

$$= \frac{10 + 16 \cdot 250 - 6}{2} \cdot 250 = 2002 \cdot 250 = 1001 \cdot 500 = 500500.$$

8. На плоскости проведено n прямых, среди них нет параллельных и никакие четыре не проходят через одну точку. Всего имеется 16 точек пересечения этих прямых, причём ровно через 6 точек проходит по три прямые. Чему равно n?

Ответ: 8.

Решение. Немного пошевелим прямые, чтобы они стали прямыми общего положения. При этом каждая точка пересечения трёх прямых даст по три точки попарного пересечения этих прямых. Всего получится $16 + 2 \cdot 6 = 28$ точек. Поскольку n прямых общего положения пересекаются в $\dfrac{n(n-1)}{2}$ точках, имеем уравнение $\dfrac{n(n-1)}{2} = 28$, из которого $n = 8$.

2 блок

1. Сколько четырёхзначных чисел среди членов арифметической прогрессии 3, 8, 13, 18, 23,...?

Ответ: 1800.

Решение. Среди любых пяти подряд идущих натуральных чисел ровно одно входит в указанную прогрессию. Девять тысяч трёхзначных чисел разбиваются на 1800 пятёрок.

2. Кран с холодной водой заполняет ванну за 15 мин, а с горячей за 23 мин. Открыли кран с горячей водой. Через сколько минут нужно открыть кран с холодной водой, чтобы к тому моменту, как ванна будет заполнена полностью, в ней холодной и горячей воды было поровну?

Ответ: Через 4 минуты.

Решение. Половина ванны заполняется горячей водой за 11,5 минут, а холодной водой за 7,5 минут. Значит, кран с горячей водой должен быть открыт на 4 минуты дольше.

3. Периметр параллелограмма 480, а его острый угол 60°. Меньшая диагональ делит его соответствующие углы в отношении $3:1$. Найдите большую сторону параллелограмма.

Ответ: 160.

Решение. Пусть в параллелограмме $ABCD$ острый угол 60° при вершине A. Тогда тупой угол при вершине D равен 120°. Имеем $\angle ADB = 30^\circ$, $\angle BDC = 90^\circ = \angle ABD$. Если в треугольнике ABD катет $AB = a$, то $AD = 2a$. Отсюда периметр равен $6a = 480$.

4. Пусть A — 2000-значное число, все цифры которого двойки. Найдите остаток от деления A на 7.

Ответ: 1.

Решение. Заметим, что $222222 = 2\cdot 111\cdot 1001 = 2\cdot 111\cdot 7\cdot 143$. Число из 6 двоек делится на 7. Будем последовательно убирать слева по 6 двоек. От этого остаток от деления на 7 не меняется. Поскольку $2000 = 6\cdot 333+2$, в конце концов придём к числу 22, которое при делении на 7 даёт остаток 1.

5. Найдите сумму корней уравнения

$$\frac{x^2-2x+2}{x-1}+\frac{x^2-8x+20}{x-4}=\frac{x^2-4x+6}{x-2}+\frac{x^2-6x+12}{x-3}.$$

Ответ: 2,5.

Решение. Если выделить целые части всех дробей, то после упрощения придём к уравнению

$$\frac{1}{x-1}+\frac{4}{x-4}=\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-3},$$

которое сводится к квадратному.

6. Пусть $f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = \dfrac{-2(x+2)}{3x+1}$ для любого числа $x \neq -1, -\frac{1}{3}$. Вычислите $f(-1)$.

Ответ: -4.

Решение. $\frac{x-1}{x+1} = -1 \iff x = 0$. Поэтому $f(-1) = \frac{-2\cdot 2}{3\cdot 0+1} = -4$.

7. Вычислите $999\cdot 997 - 995\cdot 993 + 991\cdot 989 - \ldots + 7\cdot 5 - 3\cdot 1$.

Ответ: 500000.

Решение. Удобно группировать по два слагаемых:

$$\sum_{n=1}^{125}((8n-1)(8n-3)-(8n-5)(8n-7)) = \sum_{n=1}^{125}(64n-32) =$$

$$= \frac{32+64\cdot 125-32}{2}\cdot 125 = 32\cdot 125\cdot 125 = 5^6\cdot 2^5 = 500000.$$

8. На плоскости проведено n прямых, среди них нет параллельных и никакие четыре не проходят через одну точку. Всего имеется 20 точек пересечения этих прямых, причём ровно через 8 точек проходит по три прямые. Чему равно n?

Ответ: 9.

Решение. Немного пошевелим прямые, чтобы они стали прямыми общего положения. При этом каждая точка пересечения трёх прямых даст по три точки попарного пересечения этих прямых. Всего получится $20+2\cdot 8=36$ точек. Поскольку n прямых общего положения пересекаются в $\dfrac{n(n-1)}{2}$ точках, имеем уравнение $\dfrac{n(n-1)}{2}=36$, из которого $n=9$.