Муниципальный этап всерссийской олимпиады школьников по математике

**2014-2015 учебный год**

**10 класс**

1. Существуют ли такие три числа, что если их поставить в одном порядке в качестве коэффициентов квадратного трёхчлена, то он имеет два положительных корня, а если в другом – два отрицательных?

**Решение.** Нет. Действительно, если у квадратного трехчлена оба корня отрицательны, то, по теореме Виета, все три его коэффициента – одного знака. Если же оба корня положительны, то это не так.

1. Докажите, что натуральные числа от 1 до n² можно разбить на n групп по n чисел так, что суммы чисел в каждой группе будут одинаковыми (a) n=100, б) n=101) .

**Решение**. Заполним таблицу n×n числами 1,2,…,n следующим образом: на диагонали запишем единицы, правее её – двойки (одно число вылезет за пределы таблицы – перенесём его налево на n позиций), правее двоек – тройки (два числа передвинем на место), и т.д.. В результате получится таблица, в каждой строке и в каждом столбце которой каждое из чисел 1,2,…n встречается ровно один раз. Теперь увеличим числа второй строки на n, третьей строки – на 2n, и т.д. Получится таблица, содержащая все числа от 1 до n², с одинаковыми суммами чисел в столбцах.

**Оценивание.** Полное решение – 7 баллов (а) 3 балла; б) 4 балла).

**Замечание.** Возможны и другие решения. Например, для четного n: разобьём все числа на пары с одинаковой суммой, а затем из этих пар и сформируем искомые группы. Или: в группу с номером k поместим все числа вида n∙s+j, 0 ≤ s ≤ n-1, j=k-s при 0 ≤ s ≤ k-1, j=k-s+n при k ≤ s ≤ n-1 (это и есть приведенный выше способ).

1. В неравнобедренном треугольнике ABC (AB <AC) на стороне АС отметили точку Е так что СЕ=АВ. Пусть K – середина ВС, М – середина АЕ. Найти угол KМЕ, если угол ВАС равен 40˚.

**Ответ**: 20˚.

**Решение-1**. Пусть a, b и с – длины сторон**.** Проведем биссектрису AD угла A. По свойству биссектрисы, BD : DC = c:b. Значит, DC= ab/(b+c). Но KC=a/2, так что

DK= DC-KC = a∙(b-c)/(2∙(b+c)). Отсюда DK:KC = (b-c)/(b+c). Но AM = AE/2 =(b-c)/2,

MC=c+(b-c)/2 =(b+c)/2, так что AM:MC = DK:KC. По теореме, обратной теореме Фалеса, прямые AD и MK параллельны. Значит, угол KME равен половине угла A.

**Решение-2.** Пусть N – середина AC. Тогда NK – средняя линия тр-ка, и её длина равна половине AB. Но расстояние между N (серединой AC) и M (серединой AE) равно половине длины CE, т.е., по условию, также равно половине AB. Значит,

тр-к MNK – равнобедренный. Поэтому угол KMN равен половине внешнего угла KNC (а он равен углу A).

**Оценивание.** Полное решение – 7 баллов.

1. На доске написали в ряд (в порядке возрастания) все целые числа от 0 до 2014. Затем под каждой парой соседних чисел написали их сумму. С полученной строчкой чисел проделали ту же операцию, и т.д. – пока не получилась строчка из одного числа. Докажите, что это число делится на 2014.

**Решение.** Проведём через среднее число (это - 1007) вертикальную прямую. Заметим, что числа симметричные относительно этой прямой, при делении на 2014 дают «симметричные» (т.е., дополняющие друг друга до 2014) остатки. Значит, «симметричными» будут и числа следующей строки (содержащей четное количество чисел). Но тогда и числа следующей строки будут «симметричными», причем число в середине строки будет кратно 2014, и т.д. По индукции, получим требуемое.

**Оценивание.** Полное решение – 7 баллов. Не сказано, что, начиная с третьей строки, числа в середине «нечетных» строк будут кратны 2014 - снять 2 балла.

**Замечание**. Ссылка на принцип математической индукции – не обязательна: достаточно убедительных рассуждений.

1. В клетках шахматной доски расставлены натуральные числа от 1 до 64,причем каждое число встречается ровно один раз. Докажите, что найдутся две соседние (по стороне) клетки, числа в которых отличаются не менее, чем на 5.

**Решение.** Стартуем из клетки с числом 1, и пойдем по кратчайшему маршруту (из попарно соседних клеток) в клетку с числом 64: сначала сдвинемся по горизонтали в нужную вертикаль, а затем двинемся по вертикали. При этом будет сделано не более 7 (по горизонтали)+7 (по вертикали) =14 ходов. Если в соседних клетках числа отличаются не более чем на 4, то число в последней клетке маршрута будет не более 1 + 4∙14=57 < 64. Противоречие.

**Оценивание.** Полное решение – 7 баллов.